微分・積分
第1回「講義概要」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

講義概要

- 微分・積分の基礎事項に関して講義する.
- 微分は対象の変化を，積分は対象の累積を解析する理論であり，データサイエンス，経済学，理工学など幅広い分野で基礎となる.
- 実際，その強力な手法と幅広い応用ゆえ，微分・積分は線形代数と合わせて大学数学の2本柱と位置付けられることが多い.
- 本講義では，一変数関数の微分・積分，多項式近似，多変数関数の微分・積分などを学習する.

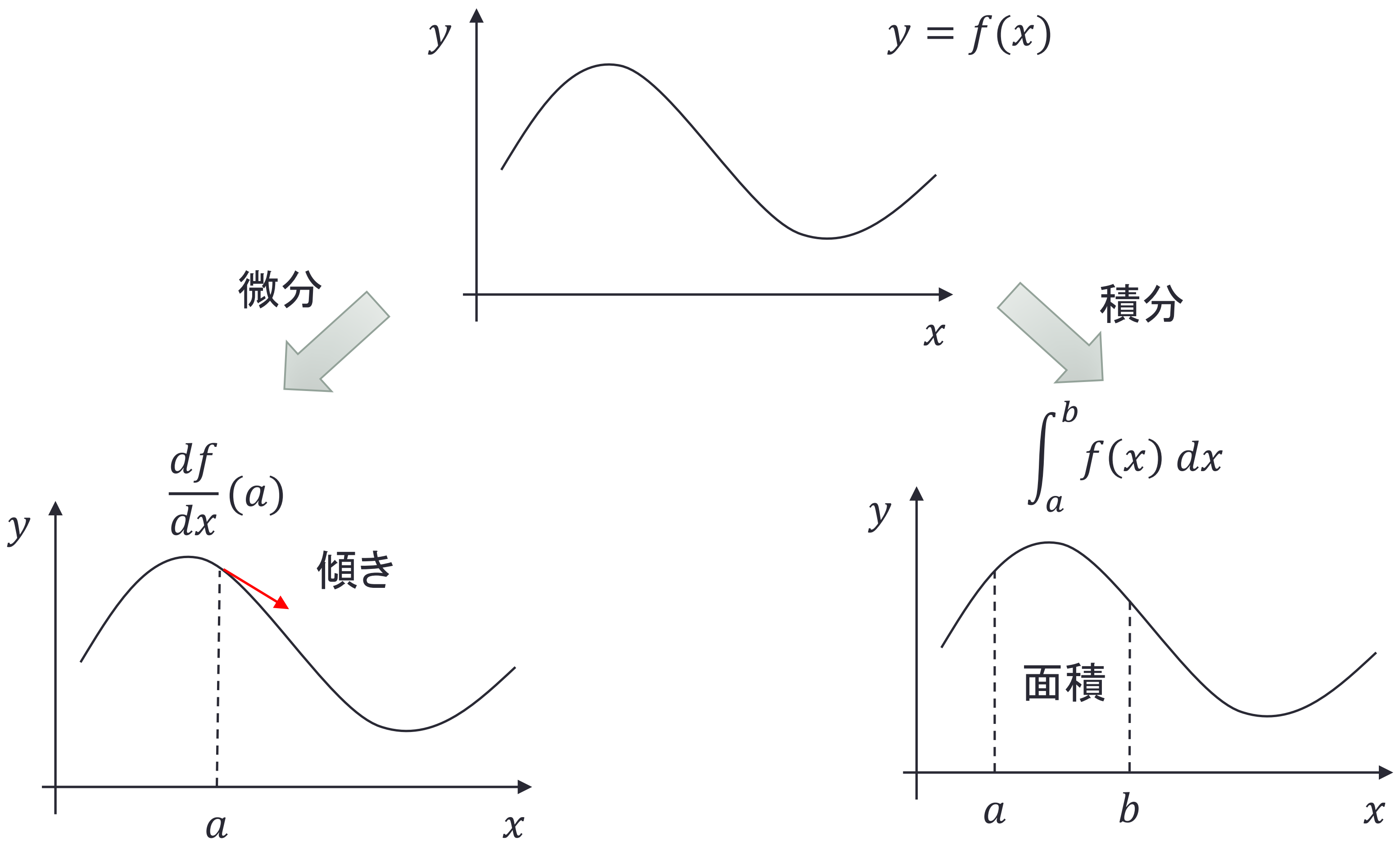
データサイエンス　経済学　理工学

微分・積分　線形代数　確率　統計

今日の内容

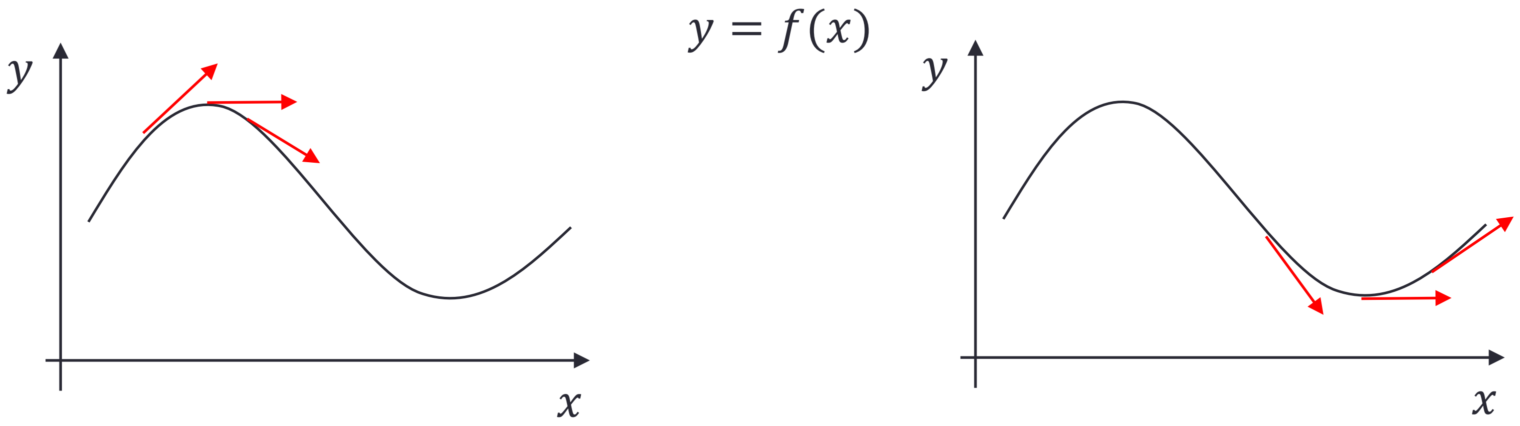
- 微分・積分の概要
  - 微分とは何か
  - 積分とは何か
- 集合
  - 外延的・内包的記法
  - 濃度
  - 直積
- 写像
  - 全射
  - 単射
  - 恒等写像
  - 合成写像
  - 逆写像

微分・積分とは何か?



微分

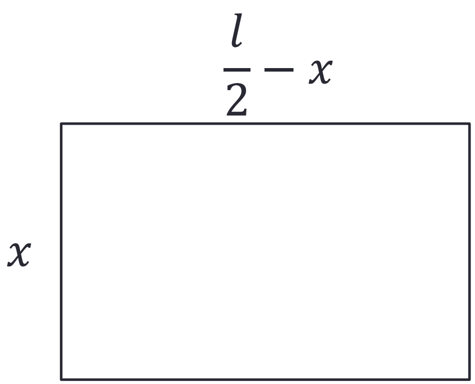
- 微分：最も値の大きい・小さいところを探す方法

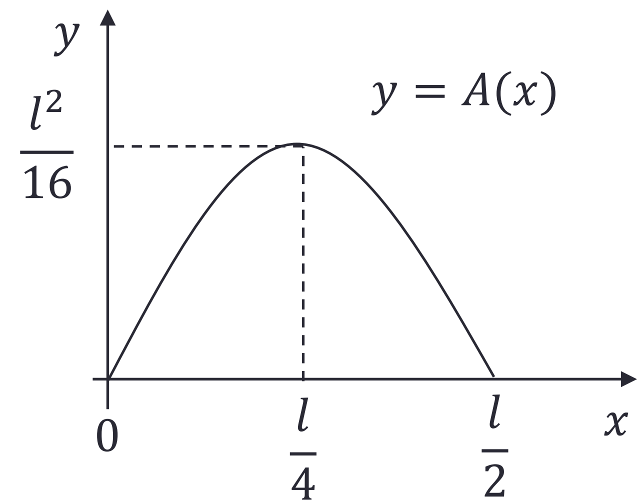


- 極大点の頂点の手前では坂は上がり，先では下がる．
- 極小点の底の手前では坂は下がり，先では上がる．
- 極大点，極小点 $\Rightarrow$ 傾き 0
- グラフの傾き $=$ 関数の値の変化率，未来の判断材料

応用

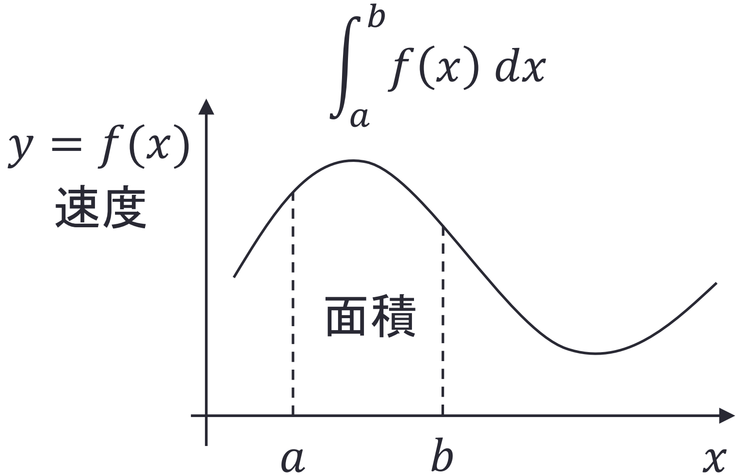
- 最適化問題:適当な条件を満たす最適解を探す
- 等周問題:周の長さが l の長方形の中で面積を最大にするものは?
- 面積 $A(x) = x\left(\frac{l}{2} - x\right)$





積分

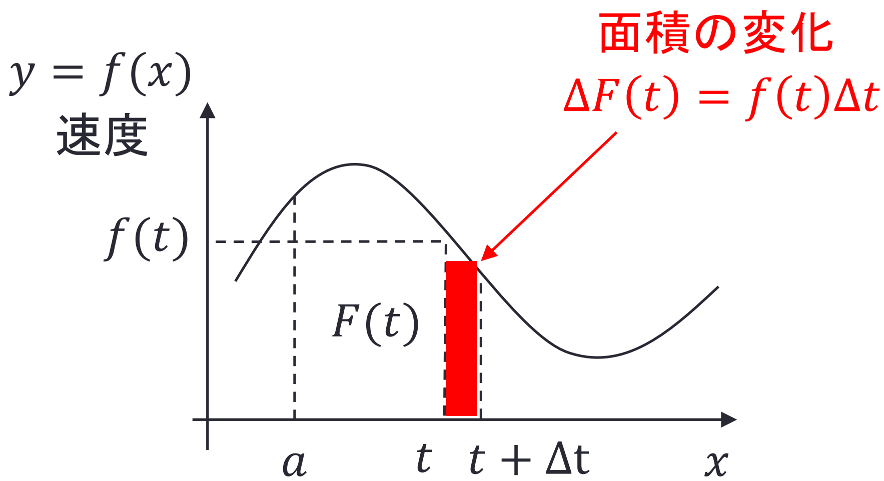
- 積分：これまでの蓄積を計算する方法



- $f(x)$ を速度とすると，面積 $\int_a^b f(x)\,dx$ は時刻 a から時刻 b までに移動した距離．
- 平均速度 ＝ 面積 / 時間
- 面積 ＝ 過去の蓄積，過去の判断材料

積分

- 時刻 a から時刻 t までに移動した距離は $F(t)=\int_a^t f(x)\,dx$ で与えられた.



$\longrightarrow \quad \dfrac{\Delta F(t)}{\Delta t} = f(t)$

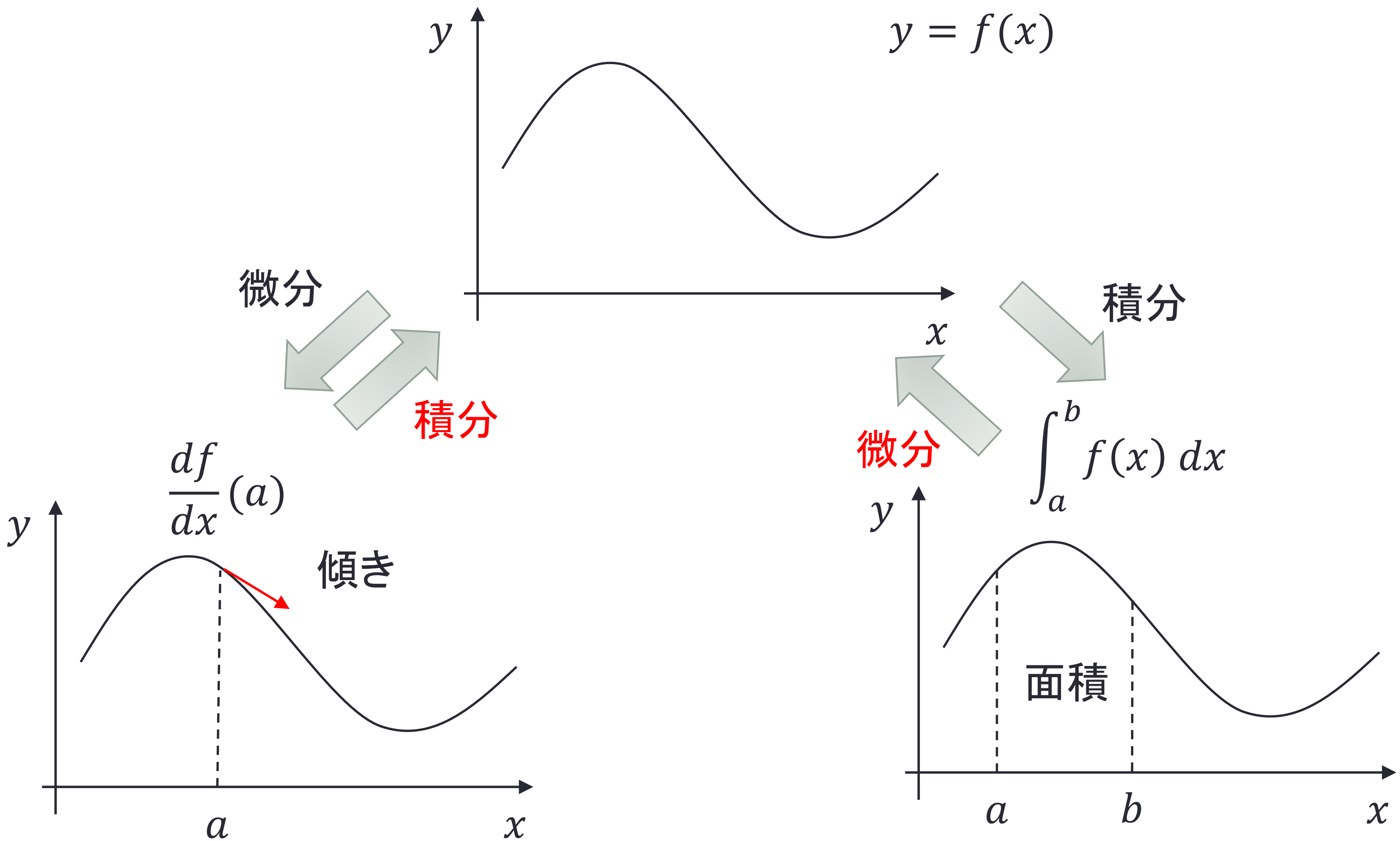
$\longrightarrow \quad \dfrac{dF}{dt}(t) = f(t)$

位置の微分 = 速度

- 「速度」を積分すると「位置」(過去の蓄積).
- 「位置」を微分すると「速度」(現在の変化).
- 一般に，微分と積分は逆操作.

微分・積分

- 以上を簡単にまとめると



現在の変化率
未来の判断材料

過去の蓄積
過去の判断材料

集合・濃度

- 記号の準備もかねて，集合論から始める.

定義1.1

- 対象(もの)の集まりを**集合**という．対象となるものは，数字，記号，文字列などいろいろ考えられる.
- 集合の構成要素を**元**(要素)という．a が集合 A の元であることを，$a \in A$ と表す．a が A の元であるとき，a は A に含まれるという.
  $a \in A$ の否定を $a \notin A$ と書く.
- 集合 A の元の数を $|A|$ で表し，A の**濃度**(位数)と呼ぶ.
  - $|A| = \infty$ なるものは**無限集合**
  - $|A| \neq \infty$ なるものは**有限集合**

集合(例)

例1.2

1. $A = \{$ りんご, みかん, バナナ $\}$ とすれば, みかん $\in A$.
2. 都道府県の集合

$$B = \{\text{北海道}, \text{青森県}, \text{岩手県}, \text{宮城県}, \dots\}$$

   は $|B| = 47$.

3. 数の集合
   - $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$: 自然数
   - $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: 整数
   - $\mathbb{Q}$: 有理数(分数全体)
   - $\mathbb{R}$: 実数

   これらはすべて無限集合.

外延的記法

- 集合を定義するには，その集合に含まれる元を指定すればよい.
- 外延的記法 : その集合が持つ元をすべて列挙する直接的な方法. 例えば,

$$\{1,2,3,4\} \qquad \{\text{子豚}, \text{狸}, \text{狐}, \text{猫}\} \qquad \{1,3,5,7,9,11,\ldots\}$$

最後の集合は奇数全体の集合を意図したものだが,「...」に何が並ぶのかが明確でないと誤解を招く恐れがある.

例1.3

- 自然数の集合

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$$

- 整数の集合

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1,0,1,2,\ldots\}$$

内包的記法

- **内包的記法**:集合に含まれる元の条件を明示する方法.
- 命題 P が真となる $x \in X$ 全体の集合を

$$\{\, x \in X \mid P \,\}$$

と書く. ここで, X は変数 x が動く範囲の集合である.

例1.4

- 例えば

$$\{\, n \in \mathbb{Z} \mid -1.4 \leq n \leq 3 \,\}$$

は「整数 n であって $-1.4 \leq n \leq 3$ が成立するもの全体の集合」と読む.

- 外延的記法を用いれば, これは次のように表せる.

$$\{\, -1, 0, 1, 2, 3 \,\}$$

外延的記法 vs 内包的記法

例1.5

- 実数 $a < b$ に対して, a, b を端点とする**閉区間**, **開区間**が

$$[a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\} \qquad (a,b) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$$

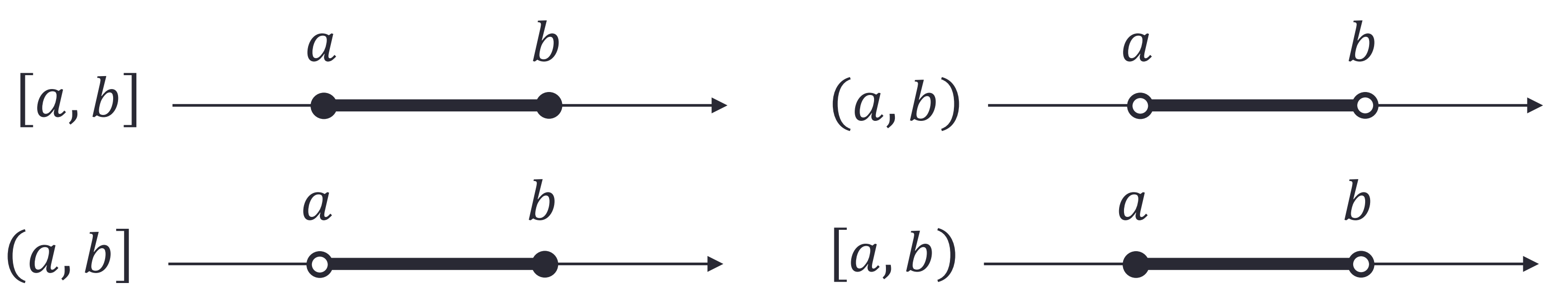
で定義される.

- 同様に**半開区間**が

$$(a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\} \qquad [a,b) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \,\}$$

で定義される.

- これらは外延的方法では記述できない無限集合である.



直積集合

定義1.6

- A, B を集合とする.
- $x \in A$ と $y \in B$ を並べた (x, y) を順序対という.
- 順序対全体のなす集合を A と B の直積集合といい, $A \times B$ と書く.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

- $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$ とすれば

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \\ &= \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\} \end{aligned}$$

- 同様に3つの集合 A, B, C の直積集合 $A \times B \times C$ や, n 個の集合 $A_1, \dots, A_n$ の直積集合

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

が定義される.

n 次元座標空間 $\mathbb{R}^n$

例1.7

- 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は実直線 $\mathbb{R}^1$ と同一視することができる.

- 実平面

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \,\}$$

- 3次元座標空間

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \,\}$$

- 一般に，$\mathbb{R}^n$ は n 次元座標空間，もしくは n 次元ユークリッド空間と呼ばれる.

- この講義では主に，$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ を扱う.

包含関係

- 複数の集合があるとき，それらの間の関係を考えることは自然である.
- 最も基本的なものが包含関係である.

定義1.8（部分集合）

- A, B を集合とする.

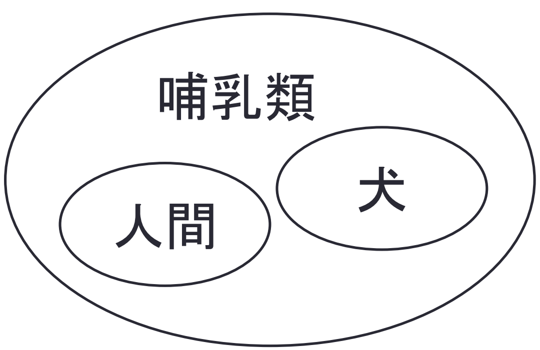
1. 任意の A の元が B の元でもあるとき，A は B の部分集合であるといい，$A \subset B$ を書く. $A \subset B$ でないとき，$A \not\subset B$ と書く.
2. $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるとき，A と B は（集合として）等しいといい，$A = B$ と書く.
3. $A \subset B$ かつ $A \neq B$ であるとき，A と B の真部分集合であるといい，$A \subsetneq B$ と書く.

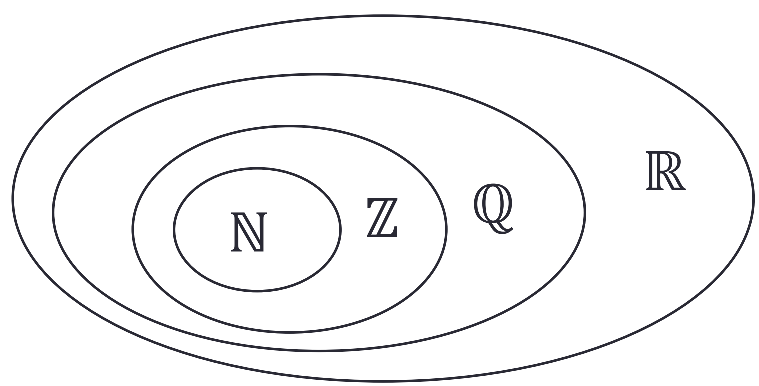
包含関係(例)

- 人間の集合を { 人間 } と略したりする．これは人間1人からなる集合ではなく，人間全体の集合を意味する．

- 例1.9

1. { 人間 } ⊂ { 哺乳類 }，{ 犬 } ⊂ { 哺乳類 }
2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
3. 実数 $a < b$ に対して，$(a, b) \subsetneq [a, b]$ である．一方で，$(a, b]$ と $[a, b)$ の間には包含関係はない．



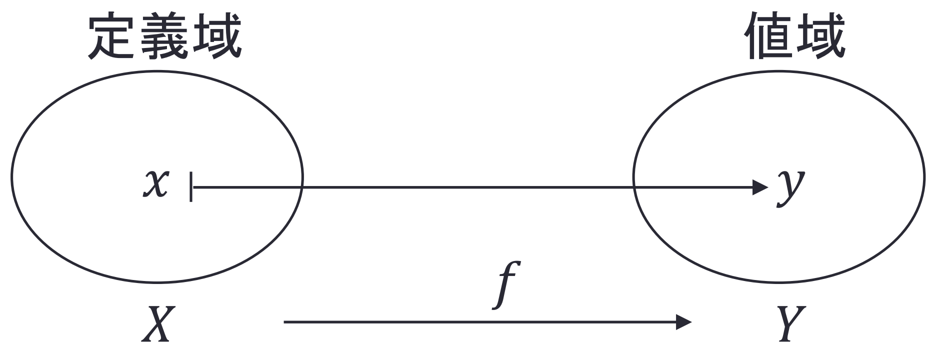


写像

定義1.10

- 集合 X の各元に対して，集合 Y の元を唯一つ定める対応のことを**写像**と呼び，$f\colon X \to Y$ と表す．
- X を**定義域**，Y を**値域**という．
- 写像 $f\colon X \to Y$ によって $x \in X$ が $y \in Y$ に対応するとき，y を f による x の**像**といい，$y = f(x)$ と書く．
- この対応を次のように書く．

$$f\colon X \to Y,\quad x \mapsto y$$



写像(例)

例1.11

1. $f\colon\{\text{人間}\}\to\mathbb{Z},\ A\mapsto A$の年齢
2. $g\colon\{\text{犬}\}\to\mathbb{R},\ A\mapsto A$の身長
3. $h\colon\{\text{猫}\}\to\{\text{猫}\},\ A\mapsto A$の母猫
4. $i\colon\{\text{日本の大学}\}\to\mathbb{N},\ A$大学 $\mapsto A$大学の学生数
5. $j\colon\{\text{日本の大学}\}\to\{\text{都道府県}\},\ A$大学 $\mapsto A$大学の所在地

- 一方で，人間 A と A の友人の対応は写像ではない．A の友人が1人とは限らないからである．

像

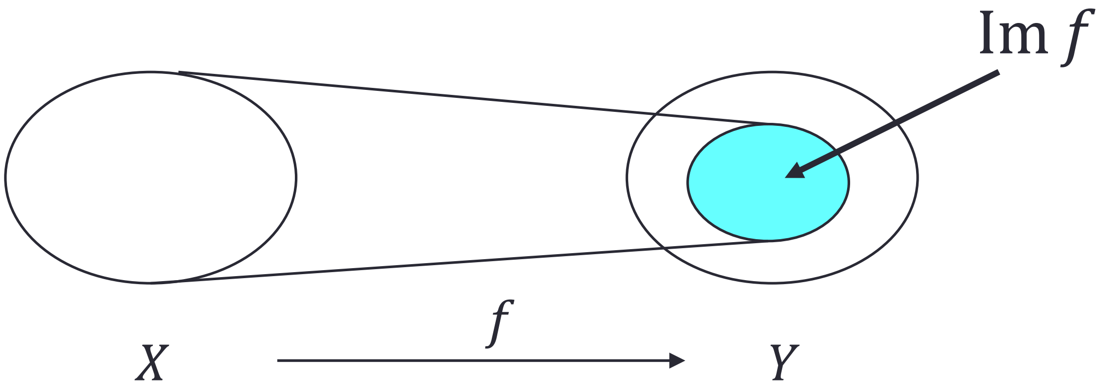
定義1.12

- 写像 $f: X \to Y$ の像を

$$\mathrm{Im}\, f = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

で定義する.

- つまり x が X のすべての元を動くとき, x の像 $f(x)$ 全体のなす Y の部分集合のことである.



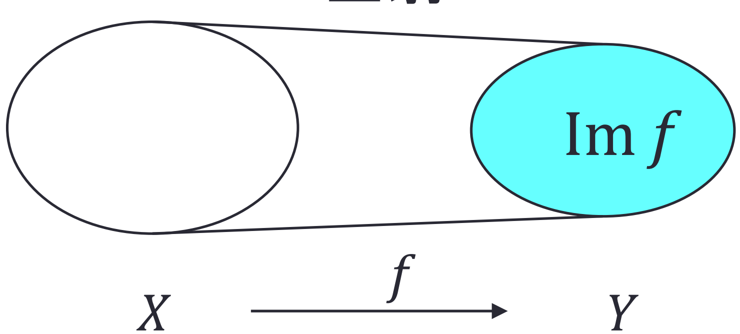
全射・単射

定義1.13

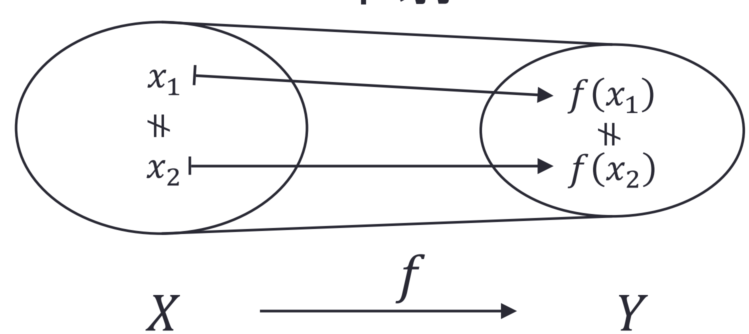
- $f: X \to Y$ を写像とする.

1. f が全射であるとは $\mathrm{Im}\, f = Y$ が成り立つ場合をいう. つまり「どの $y \in Y$ に対しても $x \in X$ が存在して $y = f(x)$」.
2. f が単射であるとは「$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$」が成り立つ場合をいう. 同値な対偶条件は「$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$」.
3. f が全単射であるとは, 全射かつ単射である場合をいう.

全射



単射



全射・単射(例)

例1.14

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto x^2(x-1)$ は(全射だが)単射ではない.
2. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto x^2$ は全射でも単射でもない. $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}_{\geq 0}$.
3. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto x^3$ は全単射である.

問題1.15

- 次の写像は全射か? 単射か?

1. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ \ x \mapsto x^2(x-1)$
2. $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ \ x \mapsto x^2$
3. $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ \ x \mapsto x^3$

全射・単射・恒等写像

例1.16

- 次の写像を考える:

$$f : \{\text{日本の大学}\} \to \mathbb{N}, \qquad A\text{ 大学} \mapsto A\text{大学の学生数}$$

$$g : \{\text{日本の大学}\} \to \{\text{都道府県}\}, \qquad A\text{ 大学} \mapsto A\text{大学の所在地}$$

- 写像 f は全射ではない(単射であろうか?).
- 写像 g は全射だが, 単射ではない.

定義1.17

- 何もしない写像 $\mathrm{id} : X \to X,\ x \mapsto x$ を恒等写像という.
- 恒等写像は全単射である.

全射・単射(問題)

問題1.18

- 次の写像は全射か? 単射か?

1. 慶應義塾大学の学生に対して，学籍番号を対応させる写像

$$f : \{\text{慶應義塾生}\} \to \mathbb{N}$$

2. 値域を学籍番号となる番号に限ったらどうであろうか?

$$g : \{\text{慶應義塾生}\} \to \{\text{学籍番号}\} \subset \mathbb{N}$$

合成写像

定義1.19

- 写像 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ に対して，合成写像 $g \circ f\colon X \to Z$ を

$$g \circ f(x) = g\bigl(f(x)\bigr)$$

  で定義する．

- つまり $x \in X$ に対して $f(x) \in Y$ が定まり，$f(x) \in Y$ に対して $g\bigl(f(x)\bigr) \in Z$ が定まる．
- 図示すれば次のようになる．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

- $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ の合成写像の表記「$g \circ f$」において f, g の順序に注意する．
- これは合成写像が $g\bigl(f(x)\bigr)$ で定義されていることから理解できる．

逆写像

定理1.20

- 写像 $f: X \to Y$ が全単射であれば，写像 $g: Y \to X$ が存在して

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

  が成り立つ.

- この g を f の逆写像といい，f^{-1} と書く.

- 実際，任意の $y \in Y$ にたいして，$x \in X$ で $f(x) = y$ なるものが唯一つ存在するので，$g(y) = x$ と定義すればよい.

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$$

例1.21

- 慶應義塾生に学籍番号を対応させる写像は全単射であった.

$$g: \{\text{慶應義塾生}\} \to \{\text{学籍番号}\} \subset \mathbb{N}$$

- 逆写像は，学籍番号から学生を特定することに対応する.

逆写像(例)

例1.22

- 写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x-4$ は全単射である.
- f の逆写像は $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \mapsto \frac{1}{2}y+2$ で与えられる.
- 実際

$$
\begin{array}{ccccc}
x & \mapsto & 2x-4 & \mapsto & \dfrac{1}{2}(2x-4)+2 = x \\
y & \mapsto & \dfrac{1}{2}y+2 & \mapsto & 2\left(\dfrac{1}{2}y+2\right)-4 = y
\end{array}
$$

なので $g\big(f(x)\big) = x$ かつ $f\big(g(y)\big) = y$.

- $f(x) = 2x-4$ の逆写像は, 方程式 $y = 2x-4$ を x に関して解くことで求まる.

まとめ

1. 微分・積分の概要

2. 集合
   - 濃度
   - 外延的記法
   - 内包的記法
   - 直積集合
   - 包含関係

3. 写像
   - 全射
   - 単射
   - 恒等写像
   - 合成写像
   - 逆写像