

微分・積分

第3回「関数の極限と連続性」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

今日の内容

1. 極限

- 右極限
- 左極限
- 極限
- 極限の性質

2. 連続

- 点連続
- 連続関数
- 中間値の定理

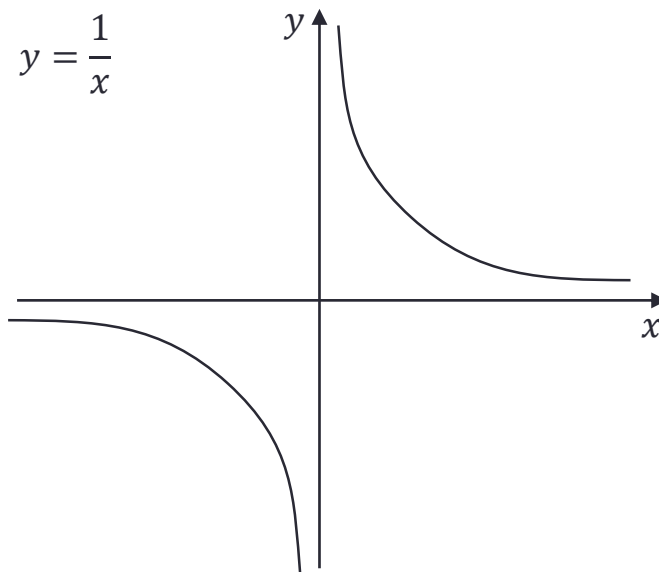
3. 不定形の極限

極限

- 除法において, 0 で割ることはできない.
 - $1/0$ や $0/0$ は存在しない.
- 無限大 ∞ という数は存在しない.
 - $\infty - 0$, $1/\infty$, $\infty - \infty$ などは意味を持たない.
- しばしば, $1/0$, $1/\infty$, $\infty - \infty$ などに近いものを扱う必要がある.
 - 微分: 微小変化 ($0/0$ に近いもの) を評価する.
 - 積分: 微小量の無限和 ($\infty \times 0$ に近いもの) を評価する.
- このようなものを数学的に適切に扱うために, ‘**極限**’ の概念が必要になる.

右極限・左極限

- 関数の値の‘**極限**’を考えたい.
- 例えば, 関数 $1/x$ は原点 0 では定義されないが, 原点の近傍では定義されている.
- $x > 0$ の方から原点に近づくと, 関数の値は正の値で発散, つまり $+\infty$ になる.
- $x < 0$ の方から原点に近づくと, 関数の値は負の値で発散, つまり $-\infty$ になる.



右極限

定義3.1

- 関数 $f(x)$ にかんして, $x > a$ を満たしながら x が a に近づくとき
- $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束することを次のように表す.

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$$

- $f(x)$ がいくらでも大きく(小さく)なることを, 正(負)の無限大に発散するといい, 次のように表す.

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

- これらを $f(x)$ の a における**右極限**という.
- $a = 0$ の場合は特別で, $x \rightarrow 0 + 0$ と書かずに, $x \rightarrow +0$ と書く.

左極限

定義3.2

- 関数 $f(x)$ にかんして, $x < a$ を満たしながら x が a に近づくとき
- $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束することを次のように表す.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha$$

- $f(x)$ がいくらでも大きく(小さく)なることを, 正(負)の無限大に発散するといひ, 次のように表す.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

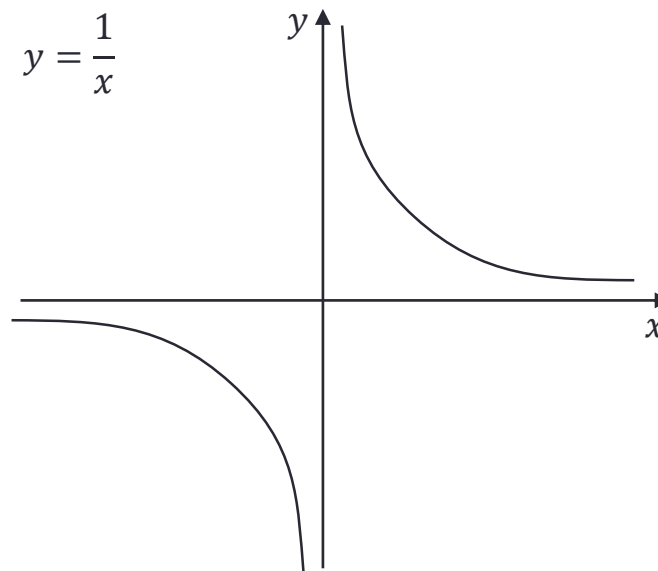
- これらを $f(x)$ の a における**左極限**という.
- $a = 0$ の場合は特別で, $x \rightarrow 0 - 0$ と書かずに, $x \rightarrow -0$ と書く.

片側極限

- 右極限と左極限は片側極限とも呼ばれる.
- 関数 $f(x)$ の a における右極限と左極限は一般に一致しない.
- $f(a)$ は定義されるとは限らないし, 定義されていても極限と一致するとは限らない.

例3.3

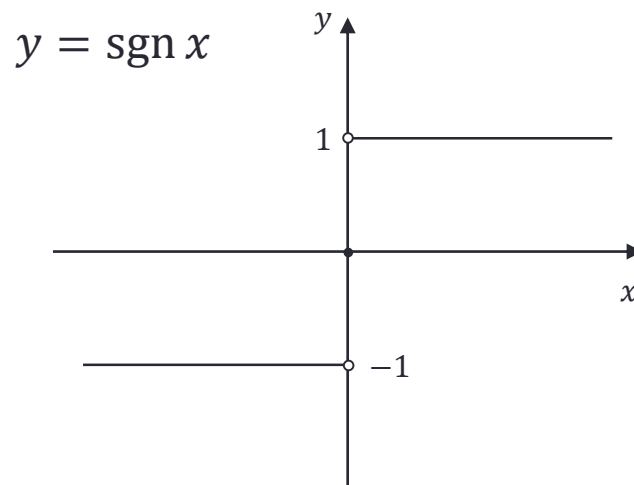
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$



片側極限

例3.4

- $f(x) = \operatorname{sgn} x$
- $\operatorname{sgn} 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1$



極限

定義3.5

- 関数 $f(x)$ の a における右極限と左極限が存在し、それらが一致するとき、その値を

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

と書いて、 $f(x)$ の a における**極限**という。

- つまり、 x が a にどのような近づき方をしても、その値があいまいなく定まるときに極限が定義される。
- 定義より、極限が存在するとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

極限(例)

例3.6

- 右極限と左極限が一致しないので, 極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$$

は存在しない.

例3.7

- 一方で

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

であるから, 極限が存在して

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

極限(問題)

- 問題3.8

- $\lim_{x \rightarrow +0} |x|$, $\lim_{x \rightarrow -0} |x|$ を求めよ.
- $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ は存在するか?

- 問題3.9

- $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn}(|x|)$, $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn}(|x|)$ を求めよ.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(|x|)$ は存在するか?

- 問題3.10

- $\lim_{x \rightarrow +0} (x^2 - x)/|x|$, $\lim_{x \rightarrow -0} (x^2 - x)/|x|$ を求めよ.
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x)/|x|$ は存在するか?

極限(注意事項)

注意3.11

- 「 x が a に近づくときに, $f(x)$ が α に収束する」を厳密に定義するには, ϵ - δ 論法を用いる必要があるが, この講義では扱わない.
 - $1/x$ の例からも分かるように, x の近づく先 a が定義域に含まれている必要はない.
 - つまり $f(a)$ が定義されていなくても, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ などの極限は議論できる.
 - 一方で, a が f の定義域 D 内の点で近似できないと $f(x)$ の a における極限は定義できない.
 - つまり, a は D もしくはその境界 ∂D に含まれる必要がある. (閉包 $\bar{D} = D \cup \partial D$)
-
- 本講義は入門的な位置づけなので, 厳密性にはあまりこだわらないで議論を進める.

極限の性質

定理3.12

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ で $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする. このとき
 - $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \alpha$
 - $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \alpha \beta$
 - $\beta \neq 0$ であれば, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$
 - a の近傍で $f(x) \leq g(x)$ であれば, $\alpha \leq \beta$
- 最後の主張は少し注意が必要で, a の近傍で $f(x) < g(x)$ であっても $\alpha < \beta$ とは限らない. ($f(x) < g(x)$ であれば $f(x) \leq g(x)$ なので, $\alpha \leq \beta$ は正しい.)

極限の性質(問題)

問題3.13

• 次を計算せよ.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + 5)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 5) \operatorname{sgn}(|x|)$

問題3.14

• 0 の近傍で $f(x) < g(x)$ であり, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ となる関数 $f(x), g(x)$ を1つ見つけよ.

±∞ に対する極限

- これまでは $a \in \mathbb{R}$ に対して極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ を考えていたが, $a = \pm\infty$ に対しても同様の議論ができる. 次の定義は厳密には不十分であるが, この講義では特に問題にならない.

定義3.15

- x が十分に大きくなるとき, $f(x)$ が α に収束することを

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$$

- x が十分に小さくなるとき, $f(x)$ が α に収束することを

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$$

と書く.

連続

定義3.16

- $f(x)$ が a で連続であるとは

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つ場合をいう。つまり、極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在し、 $f(a) \in \mathbb{R}$ が定義され、それらが一致する場合である。

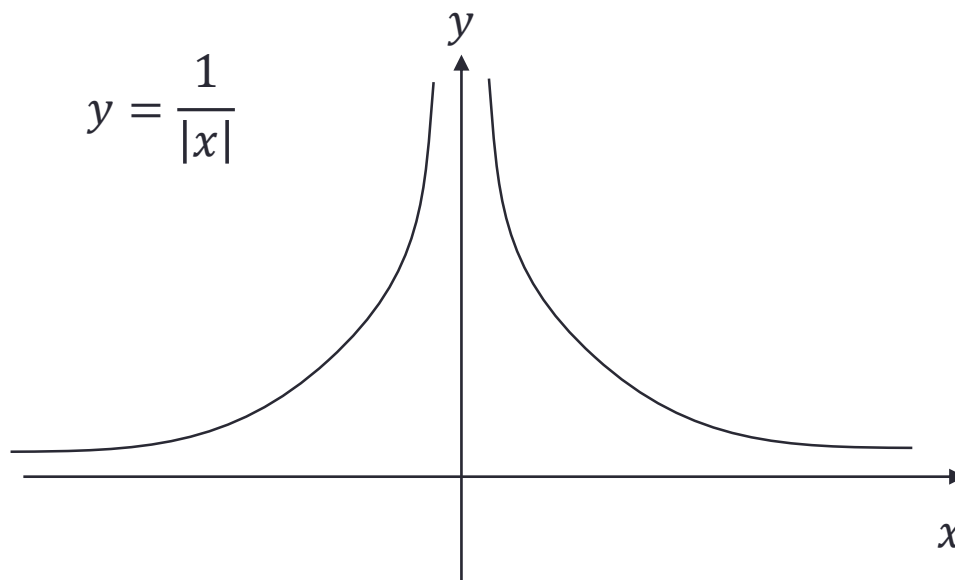
- 連続でないとき、**不連続**であるという。
- $f(x)$ の定義域のすべての点において連続である場合、 $f(x)$ は**連続関数**であるという。
- $f(x)$ が a で連続であるとき、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \pm\infty$ であることに注意。

不連続

例3.17

- $1/x$ や $\text{sgn}(x)$ は 0 において不連続. ($x \neq 0$ では連続)
- $1/|x|$ は $1/|0|$ が定義されないから, 0 において不連続.

($\lim_{x \rightarrow 0} 1/|x| = +\infty$ でもある.)



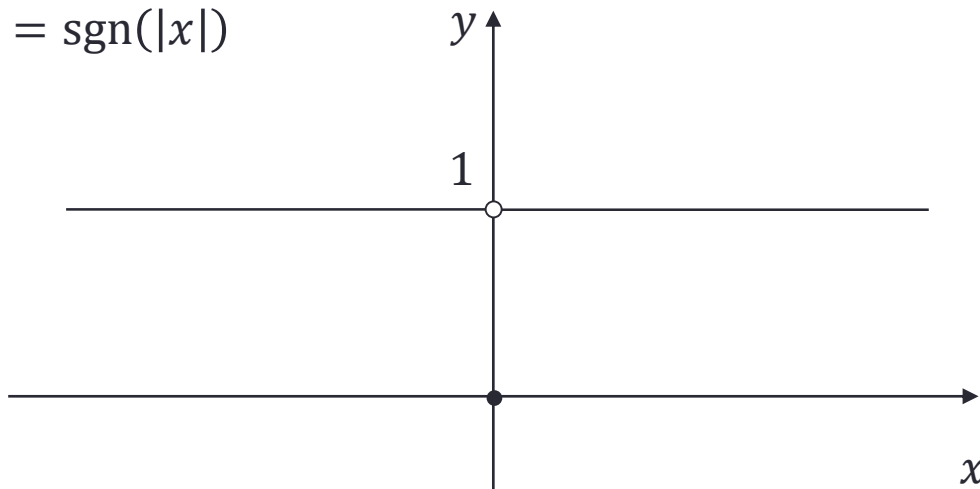
不連続

例3.18

- $\text{sgn}(|x|)$ は, $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(|x|)$ が存在し, $\text{sgn}(|0|)$ も定義されるが

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(|x|) \neq \text{sgn}(|0|)$$

$$y = \text{sgn}(|x|)$$

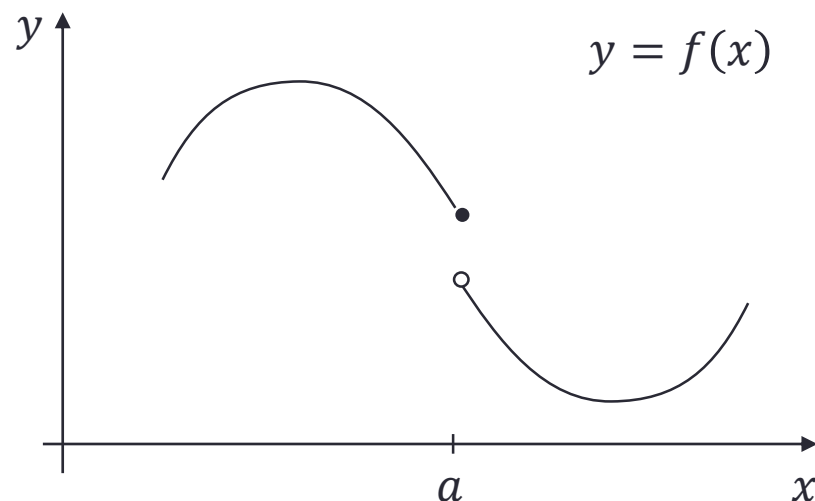
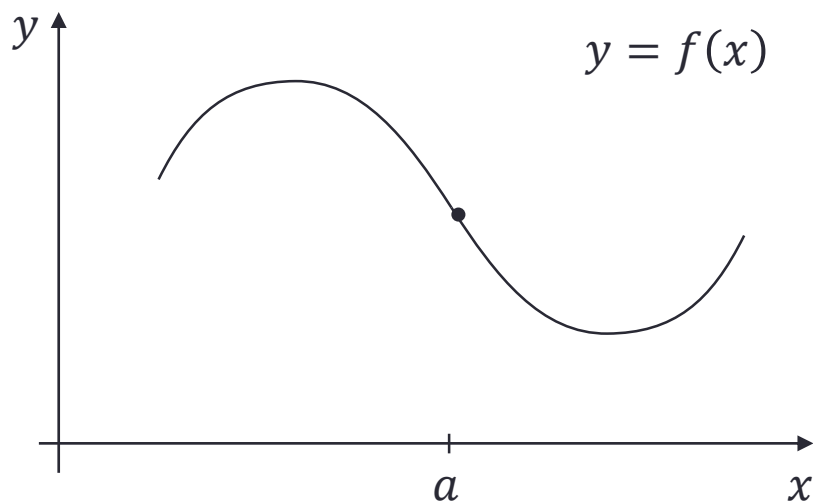


$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(|x|) = 1$$

$$\text{sgn}(|0|) = 0$$

連続関数の直感

- 関数 $f(x)$ が a において連続とは, $f(x)$ のグラフが $(a, f(a))$ でつながっているという直感を持つてよい.



- 左図の関数は a で連続, 右図の関数は a で不連続.
- 連続関数とは, グラフが(定義域において)つながっている. 左図のような関数.

連続(問題)

問題3.19

• 次の関数のグラフを描け. また, これらは連続関数か?

1. $|x(x + 3)(x - 2)|$

2. $\text{sgn}(\sin x)$

連続関数の加減乗除

定理3.20

- $f(x), g(x)$ が a において連続であるとする.
 - $c f(x), f(x) + g(x), f(x) g(x)$ は a において連続である.
 - $g(a) \neq 0$ であれば, $f(x)/g(x)$ は a において連続である.
- 恒等関数 $f(x) = x$ が連続関数であることから, 多項式関数が, 有理関数も(定義域において)連続関数である.
- 三角関数, 指数関数, 対数関数は連続関数であることが知られているため, $2 \sin x - 3 \log x$ や $e^x \cos x$ なども連続関数である.

合成関数の連続性

定理3.21

- 関数 $f(x), g(x)$ に関して,
 - 関数 $g(x)$ は a において連続であり,
 - 関数 $f(x)$ の定義域が $g(a)$ を含み $g(a)$ において連続であるとき,
- 合成関数 $f(g(x))$ も a において連続である.

例3.22

- 次の関数は連続関数である.

$$\sin(x^3 + 5x + 2)$$

$$e^{x^3} + \log(x^2 + 1)$$

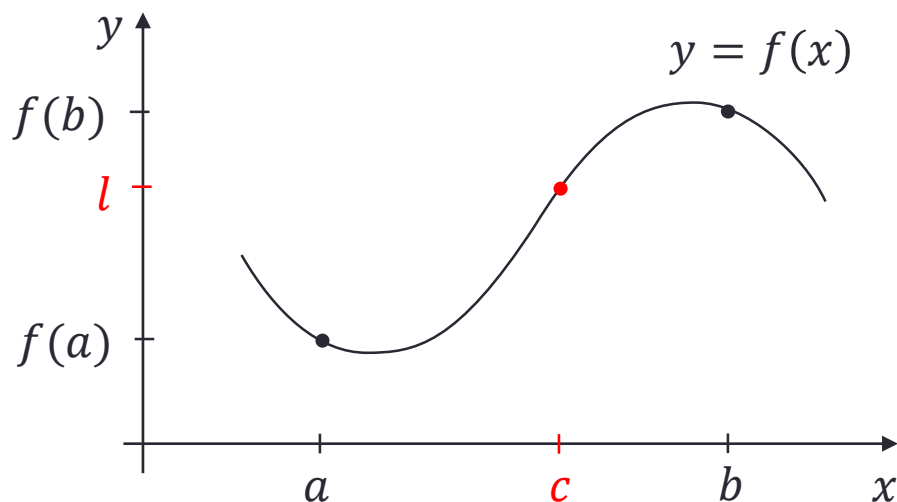
- 他にも, $\log(x + 1)$ は $x \leq -1$ で定義されないが, $x > -1$ において連続である.

中間値の定理

- 連続関数に関する最も重要な定理が、次の**中間値の定理**である。

定理3.23(中間値の定理)

- 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、 $f(a) < f(b)$ であるとき、
- 任意の $l \in [f(a), f(b)]$ に対して、 $l = f(c)$ となる点 $c \in [a, b]$ が存在する。



極限計算

- 定義より、関数が連続な点に関しては、極限值を単に代入して求めることができる。

例3.24

- $(x^2 + 2x - 3)/(x^2 - 1)$ は $x \neq \pm 1$ において連続であるから

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{3^2 + 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 1} = \frac{3}{2}$$

- 一方で、1 は $(x^2 + 2x - 3)/(x^2 - 1)$ の定義域に入っていないため、この点においてこの関数は連続でない。無理に代入すると

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{1^2 + 2 \cdot 1 - 3}{1^2 - 1} = \frac{0}{0} \quad ??$$

- しかし、 $x \rightarrow 1$ において $x - 1 \neq 0$ であるから、次のように極限が求まる。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{x + 1} = \frac{1 + 3}{1 + 1} = 2$$

不定形

- 一般に, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ といった形は**不定形**と呼ばれる.
- 特別な場合には, これらは数学的に意味を持ち, 計算可能である.

例3.25

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 8}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 - 10}{7x^3 + 5x + 2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 2x^2)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 100} - \sqrt{x})$$

不定形(例)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2 + 2x + 4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 - 10}{7x^3 + 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{2}{x} - \frac{10}{x^3}}{7 + \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{4}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 2x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(3 + \frac{2}{x} \right) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+100} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+100} - \sqrt{x})(\sqrt{x+100} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+100} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100}{\sqrt{x+100} + \sqrt{x}} = 0 \end{aligned}$$

不定形(問題)

問題3.26

• 次の極限を計算しなさい.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - x^2 - 4x + 3}{x^3 + x^2 - x + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x + 2}{-6x^2 + 3x + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 4x^2 - x - 2}$$

まとめ

1. 極限

- 右極限
- 左極限
- 極限
- 極限の性質

2. 連続

- 点連続
- 連続関数
- 中間値の定理

3. 不定形の極限