

微分・積分

第4回「微分の基礎」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

今日の内容

1. 平均変化率, 微分係数, 接線の傾き
2. 導関数, 導関数の性質

極限の別表示

- 前回, 関数 $f(x)$ の a における極限を,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha$$

であるときに, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ と定義した.

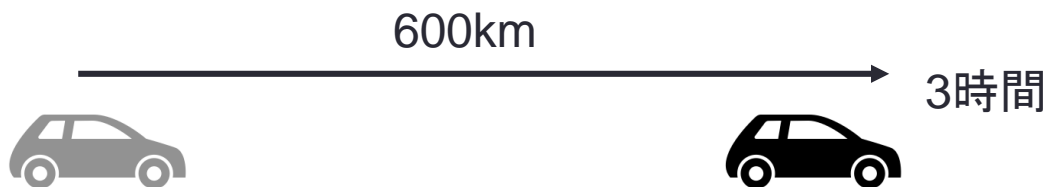
- 上記の条件は, $x = a + h$ と表すと,

$$\lim_{h \rightarrow +0} f(a + h) = \lim_{x \rightarrow -0} f(a + h) = \alpha$$

と同値であり, これを $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \alpha$ と書く.

- 今回の講義では後者の記号を用いる.

平均変化率



問題4.1

- 600km の移動に 3 時間かかったとき, 速度は何 km/h だろうか?

- 答えは簡単で,

$$\frac{600 \text{ km}}{3 \text{ 時間}} = 200 \text{ km/h}$$

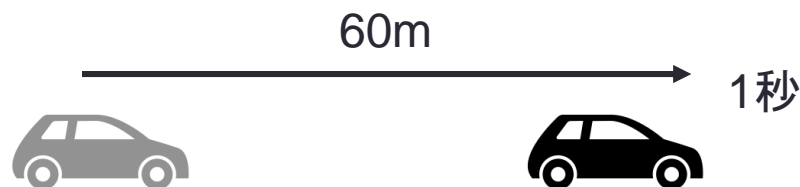
と答えたくなる.

- しかしながら, これは平均速度であり, 常に一定の速度で移動するとは限らない. つまり, ある特定の時刻での速度は必ずしも 200 km/h になるとは限らない.
- この問題設定からは, 平均速度しか求めることができない.

平均変化率

問題4.2

- 出発からちょうど1時間後の速度はどのように求めれば良いだろうか？



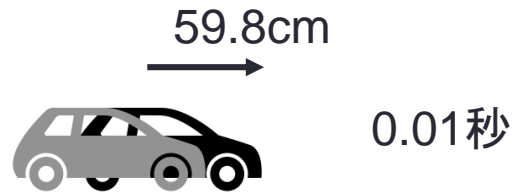
- 出発してから1時間後において、1秒間に60m移動していたとすると、

$$\frac{60 \text{ m}}{1 \text{ 秒}} = \frac{0.06 \text{ km}}{1/3600 \text{ 時間}} = 216 \text{ km/h}$$

と答えたくなる.

- しかしながら、時間スケールを変えただけで、状況は先の問題と変わっていない.
- これは1秒間の平均速度であり、1秒間の中に速度が変化している可能性がある.

平均変化率



- 時間をさらに細かく刻んで 0.01 秒間にどれだけ移動したかを計測したところ, 59.8cm 移動したことが判明した.

- すると, この 0.01 秒間の平均速度は

$$\frac{59.8\text{cm}}{0.01\text{秒}} = \frac{0.000598\text{km}}{1/360000\text{時間}} = 215.28\text{km/h}$$

となる.

- もちろん, この 0.01 秒間の間に速度が変化している可能性はあるが, 良い近似になっていることが期待される.

平均変化率

- 一般に, 時間軸をどんどん短くすることで, その時刻での速度をより正確に測定できることが期待される.

- つまり, ある時刻での速度は,

$$\frac{\text{微小な位置の変化}}{\text{微小な時間の変化}}$$

の極限として得られると考えられる.

- このような極限を扱う理論が, **微分**である.

微分係数

定義4.3

- 関数 $f(x)$ の定義域を D とする.
- 点 $a \in D$ に関して, 極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき, $f(x)$ は a で**微分可能**であるといい, $f'(a)$ で表す.

- $f'(a)$ は $f(x)$ の a における**微分係数**と呼ばれる.

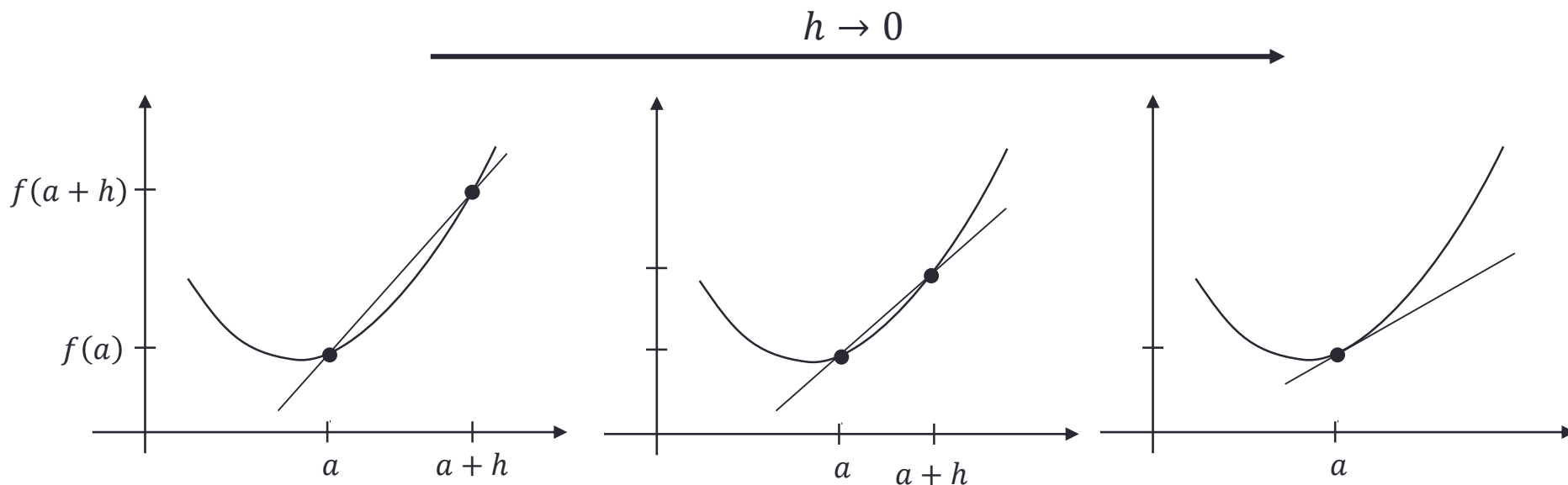
- $f(x)$ が a で微分可能ならば, $f(x)$ は a で連続であることが分かるが, その逆は一般には成立しない.

微分係数と接線の傾き

- 微分係数

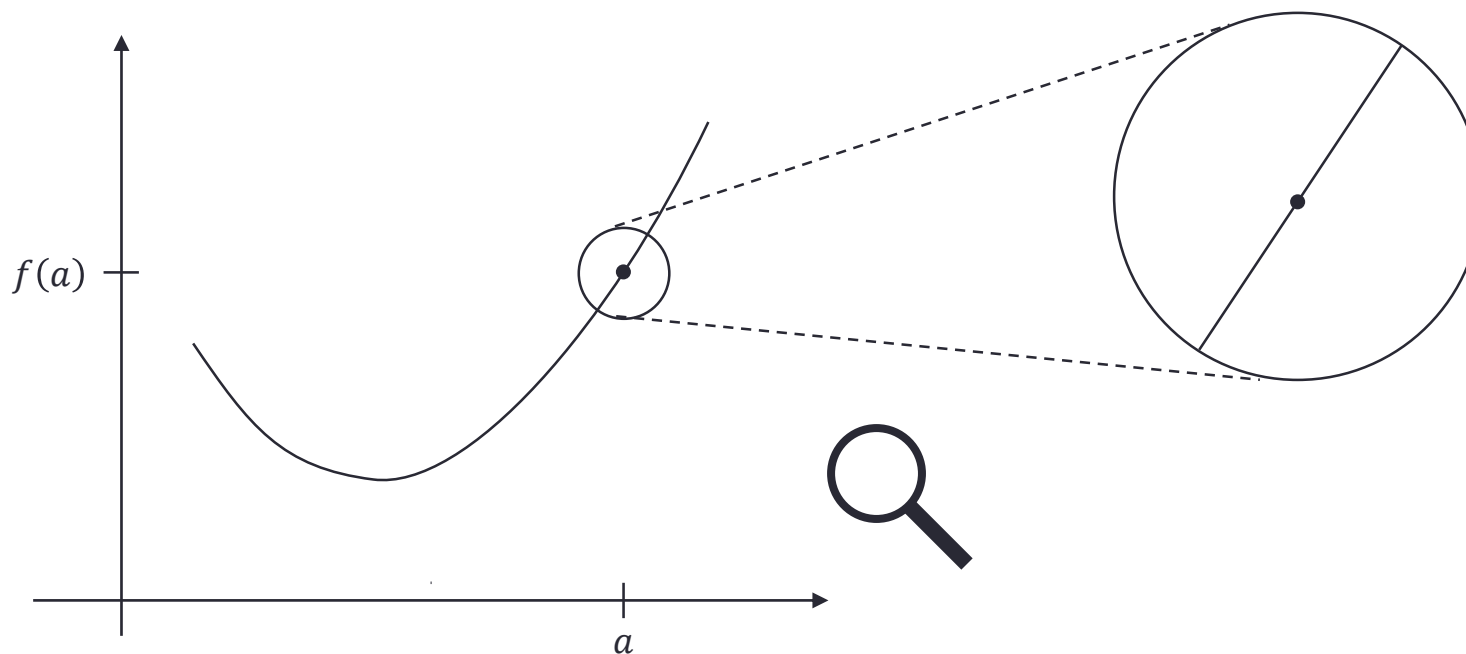
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

は $f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線の傾きとみなすことができる。



微分可能性

- 関数 $f(x)$ が a において微分可能であることは, $f(x)$ のグラフが点 $(a, f(a))$ における接線が定義できるくらいなめらかであることを意味する.
- 点 $(a, f(a))$ の近傍でグラフが直線のように見えるともいえる.



導関数

定義4.4

- 関数 $f(x)$ がその定義域 D の任意の点において微分可能であるとする.
- $a \in D$ に対して, その点における微分係数 $f'(a)$ を返す関数

$$f': D \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \mapsto f'(a)$$

を $f(x)$ の導関数と呼び, $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を微分するという.

- $f'(x)$ は $\frac{df}{dx}(x)$ と書かれる場合もある.

導関数 (x, x^2)

例4.5

- $f(x) = x$ の導関数を定義に従って計算する.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

$f(x) = x$ のグラフの点 (a, a) における接線の傾きは 1.

- $f(x) = x^2$ の導関数を定義に従って計算する.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

$f(x) = x^2$ のグラフの点 (a, a^2) における接線の傾きは $2a$.

導関数 (x^3)

問題4.6

- $f(x) = x^3$ の導関数を定義に従って計算せよ. つまり

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

を求めよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

- $f(x) = x^3$ のグラフの点 (a, a^3) における接線の傾きは $3a^2$.

導関数 (x^n)

定理4.7

- $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f(x) = x^n$ の導関数は $f'(x) = n x^{n-1}$ である.

- $f(x) = x^n$ の導関数を定義にしたがって計算すると

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n h x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h^2 x^{n-2} + \dots + h^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h x^{n-2} + \dots + h^{n-1} \right) \\
 &= n x^{n-1}
 \end{aligned}$$

- $f(x) = x^n$ のグラフの点 (a, a^n) における接線の傾きは $n a^{n-1}$.

導関数(定数)

定理4.8

- 定数関数 $f(x) = c$ の導関数は $f'(x) = 0$ である.

- $f(x) = c$ の導関数を定義にしたがって計算すると

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

- $f(x) = c$ のグラフの点 (a, c) における接線の傾きは 0.

微分の性質

定理4.9

• $f(x), g(x)$ を (共通の定義域で) 微分可能な関数とする.

$$1. (a f(x) + b g(x))' = a f'(x) + b g'(x) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$2. (f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

$$3. \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$$

• これから

$$(f(x)^2)' = 2f'(x) f(x) \qquad \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

などが分かる.

多項式の微分

- 定理4.9を使うと, 多項式の導関数は簡単に計算できる.

例4.10

- $(3x^2 - 5x + 1)' = 6x^2 - 5$
- $(x^4 - 15x^2 + 5x + \pi)' = 4x^3 - 30x + 5$
- $(-x^{100} + 57x^2 + \pi x + \log_2 7)' = -100x^{99} + 114x + \pi$

- 関数のグラフが描けなくても, 接線の傾きはすぐ分かる.

積の微分

例4.11

- $(x^3 + 5)(4x + 1)$ の導関数を2通りの方法で計算する.
- 定理4.9(2)を使うと

$$\begin{aligned}((x^3 + 5)(4x + 1))' &= (x^3 + 5)'(4x + 1) + (x^3 + 5)(4x + 1)' \\ &= 3x^2(4x + 1) + (x^3 + 5) \cdot 4 \\ &= 16x^3 + 3x^2 + 20\end{aligned}$$

- 微分の計算の前に展開すれば

$$\begin{aligned}((x^3 + 5)(4x + 1))' &= (4x^4 + x^3 + 20x + 5)' \\ &= 16x^3 + 3x^2 + 20\end{aligned}$$

導関数 ($1/x^n$)

定理4.12

- 有理関数 $f(x) = \frac{1}{x^n}$ の導関数は $f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$ である.

- 逆数の微分公式 $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$ を用いると

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

定理4.13

- $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $f(x) = x^n$ の導関数は $f'(x) = n x^{n-1}$ である.

微分可能なら連続

定理4.14

- 関数 $f(x)$ は a で微分可能であれば, 連続である.

- 実際

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ が有限の値として存在}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ が存在してその値が } f(a) \text{ と一致する}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ が } x = a \text{ で連続}$$

- 対偶を考えれば, 「 a で連続でなければ, 微分可能ではない」とも表現できる.

導関数の非存在

- 関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続でなければ微分可能でないが、連続であっても微分可能とは限らない。

例4.15

- $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分不可能である。
- 直感的には、 $x = 0$ で接線が引けないからである。
- $f(x) = |x|$ が $x = 0$ で微分可能であれば、極限

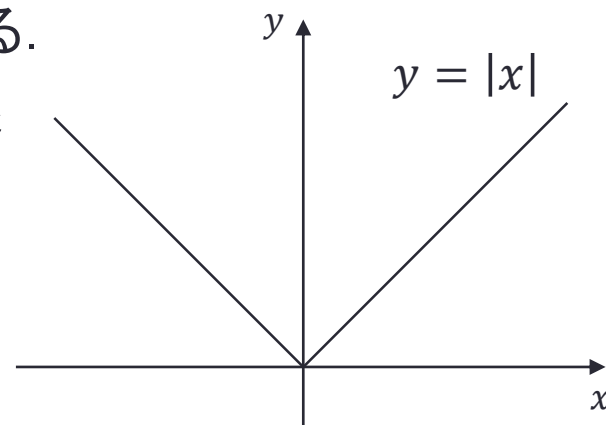
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

が存在するはずであるが、

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = -1$$

となり右極限と左極限は一致しない。



導関数の計算

問題4.16

- $(3x^2 + 5)(x^3 + x)$ の導関数を(1)展開してから計算, (2)積の微分公式を用いて計算, の2通りで求め, 答えが一致することを確認せよ.

問題4.17

- $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$ の導関数を計算せよ.

問題4.18

- $\frac{x}{x+1} - (x+1)(x^2-4)$ の導関数を計算せよ.

定理4.9(2)の証明(発展)

- 公式 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を証明する.

$$\begin{aligned}
 & (f(x)g(x))' \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
 \end{aligned}$$

定理4.9(3)の証明(発展)

- 公式 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ を証明する.
- $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}g(x)$ に積の微分の公式を適用すると

$$f'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}g(x)\right)' = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'g(x) + \frac{f(x)}{g(x)}g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'g(x) = f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

まとめ

1. 平均変化率, 微分係数, 接線の傾き
2. 導関数, 導関数の性質