微分・積分
第8回「高次微分と多項式近似1」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

1. ロルの定理
   - 平均値の定理
   - コーシーの平均値の定理

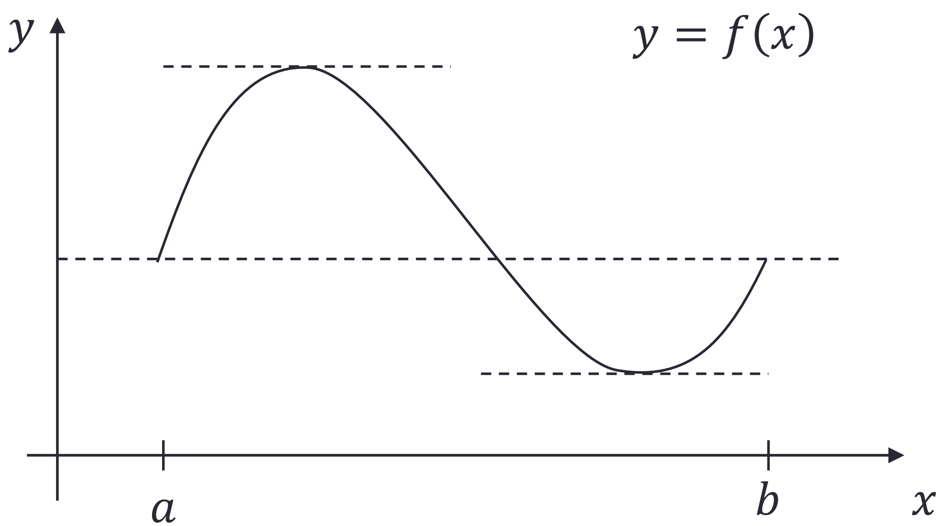
2. 高次導関数
   - テイラーの定理
   - 有限テイラー展開

ロルの定理

定理8.1（ロルの定理）

- 微分可能な関数 $f(x)$ の定義域に $[a,b]$ が含まれ，$f(a)=f(b)$ が成り立つならば，$f'(c)=0$ となる $c \in (a,b)$ が存在する.

- $f(x)$ が定数関数であれば明らか.
- そうでない場合には，ワイエルシュトラスの定理より，ある $c \in (a,b)$ において最大値または最小値をとる.
- c において $f(x)$ が極値をとるので，$f'(c)=0$.



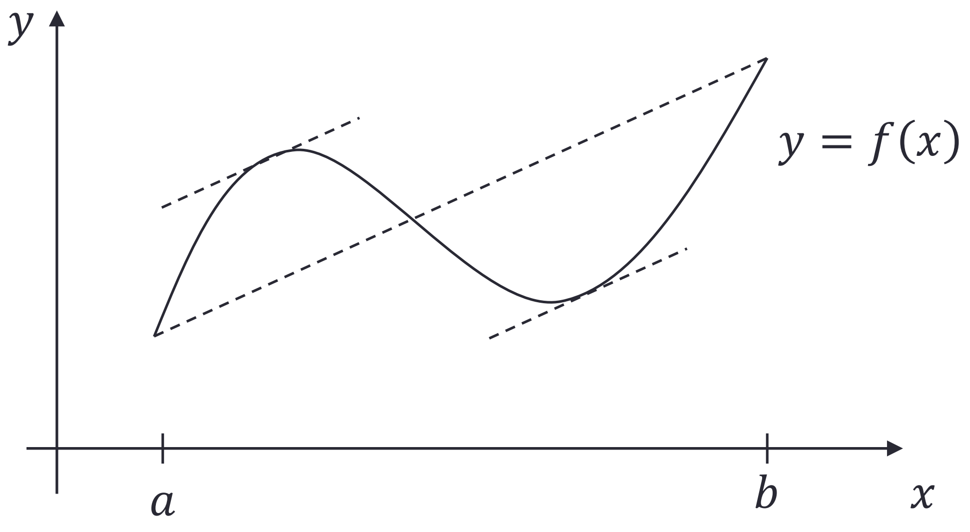
平均値の定理

- ロルの定理を斜めにずらしたものが平均値の定理である.

定理8.2（平均値の定理）
- 微分可能な関数 $f(x)$ の定義域に $[a, b]$ が含まれるとき

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たす $c \in (a, b)$ が存在する.



平均値の定理(証明)

- 関数

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

は $g(a) = g(b)$ を満たすので，ロルの定理より $g'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在する.

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

なので，平均値の定理が示された.

- 端点で関数の値が等しくなるように一次関数を引くことで，ロルの定理に帰着させている.

コーシーの平均値の定理

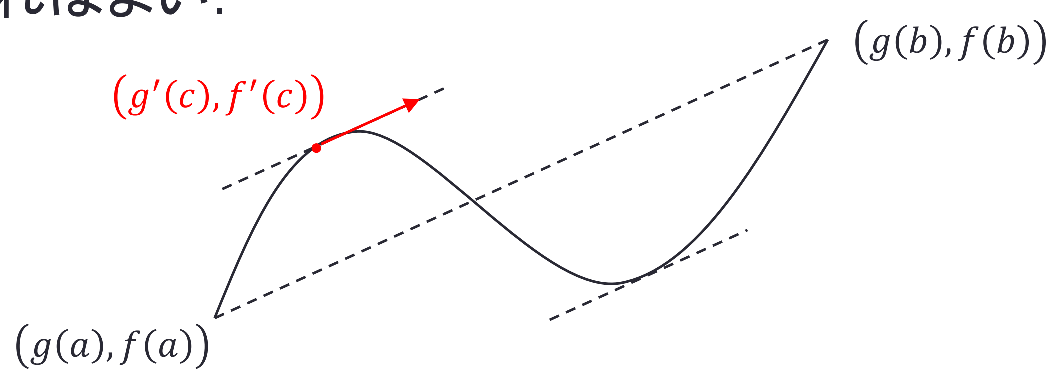
定理8.3（コーシーの平均値の定理）

- 微分可能な関数 $f(x), g(x)$ の定義域に $[a, b]$ が含まれ，$x \in (a, b)$ において $g'(x) \neq 0$ であり，$g(b) - g(a) \neq 0$ であれば

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する.

- $g(x) = x$ の場合が通常の平均値の定理である.
- 直感的には，媒介変数 $t \in [a, b]$ を用いて $(x, y) = \big(g(t), f(t)\big)$ の軌跡を考えればよい.



コーシーの平均値の定理(証明)

- 関数

$$\phi(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x)$$

を考えると

$$\phi(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = \phi(b)$$

であるから，ロルの定理により，ある $c \in (a, b)$ が存在して

$$0 = \phi'(c) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(c) - \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$$

- したがって，上式を整理して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ロピタルの定理

- コーシーの平均値の定理を利用して，ロピタルの定理を証明する．

定理8.4（ロピタルの定理）

- 関数 $f(x), g(x)$ が a を除く a の近傍において微分可能であり，

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

かつ，$g'(x) \neq 0$ とする．

- このとき，極限 $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- ロピタルの定理は，$a = \pm\infty$ や $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ の場合も成り立つ．

ロピタルの定理（証明）

- 必要ならば $f(a) = g(a) = 0$ と置きなおすことにより，$f(x), g(x)$ は点 a を含めて連続としても極限には影響しない.
- $x > a$ とすると，$[a, x]$ にコーシーの平均値の定理を適用して
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
となる $c \in (a, x)$ が存在する.
- $x \to a + 0$ のとき $c \to a + 0$ であるから
$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
- $x \to a - 0$ の場合も同様である.

高次導関数

- 微分とは，関数を1次多項式（関数）で近似した様子を記述するもので，導関数の情報から関数の増減の解析が可能になった．
- 導関数がさらに微分可能ならば，2回微分することにより凹凸を知ることができた．これは関数を2次多項式で近似することに相当する．
- 関数がさらに微分可能な場合には，3回微分，4回微分，… を考えることにより，与えられた関数の3次多項式，4次多項式，… での近似を考察することができる．

高次導関数

- 関数 $f(x)$ が微分可能な時，$f'(x)$ をその導関数と呼んだ.
- これを帰納的に繰り返すことで高次導関数を得ることができる.

定義8.5

- $f'(x)$ が微分可能なとき，$f^{(2)}(x) = f''(x)$ を $f(x)$ の2次導関数という.
- $f^{(n-1)}(x)$ が微分可能なとき,

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

を $f(x)$ の n 次導関数という.

- $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$, $\frac{d^n f}{dx^n}(x)$ とも書かれる.

- 記号を合わせるために，$f(x)$ を $f^{(0)}(x)$，$f'(x)$ を $f^{(1)}(x)$ と書く場合もある.

高次導関数

定義8.6

- 関数 $f(x)$ が n 回微分可能であり，$f^{(n)}(x)$ が連続であるとき，$f(x)$ は n 回連続微分可能，または C^n 級であるという．
- 関数 $f(x)$ が何回でも微分可能であるとき，$f(x)$ は無限回微分可能，または C^∞ 級であるという．

- 実際の計算に現れる関数は C^∞ 級であることが多いので，あまり神経質になる必要はない．
- 一方で，$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ は微分可能であるが，$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ は原点 0 で連続でないため，1回連続微分可能ではない．
- 原点 0 以外では無限回微分可能である．

高次導関数(例)

例8.7

- 4次多項式関数

$$f(x) = 4x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 7x - 5$$

に対して

$$f'(x) = 16x^3 + 18x^2 - 6x + 7$$

$$f^{(2)}(x) = 48x^2 + 36x - 6$$

$$f^{(3)}(x) = 96x + 36$$

$$f^{(4)}(x) = 96$$

$$f^{(5)}(x) = 0$$

高次導関数(問題)

問題8.8

- 次の関数の高次導関数を計算せよ.

1. $\sin x$
2. x^n

1. $f(x) = \sin x$ の高次導関数を計算する.

$$f'(x) = \cos x$$
$$f^{(2)}(x) = -\sin x$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos x$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

であるから，以下周期4でこれらを繰り返す.

高次導関数(問題)

2. $f(x) = x^n$ の高次導関数を計算する.

$$f'(x) = n\,x^{n-1}$$

$$f^{(2)}(x) = n(n-1)\,x^{n-2}$$

$$f^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}$$

$$f^{(4)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-4}$$

$$\cdots = \cdots$$

$$f^{(n-1)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdot 2\,x$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

最後は n の階乗である.

多項式と高次導関数

定理8.9

- n 次多項式関数 $f(x)$ に関して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

- ただし，$0! = 1$ である.

- つまり，多項式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ に関して，x^k の係数は

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

として計算できる.

定理8.9の証明

- 多項式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \cdots$ に関して

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \cdots$$

$$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + 5 \cdot 4a_5 x^3 \cdots$$

$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 x + 5 \cdot 4 \cdot 3a_5 x^2 + \cdots$$

$$\cdots = \cdots$$

$$f^{(k)}(x) = k!\, a_k + (k+1) \cdots 2a_{k+1} x + (k+2) \cdots 3a_{k+2} x^2 + \cdots$$

であるから

$$f^{(k)}(0) = k!\, a_k$$

多項式と高次導関数

- 同様の議論で次も示すことができる.

定理8.10

- n 次多項式関数 $f(x)$ に関して

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

多項式と高次導関数(例)

例8.11

- $f(x) = 4x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ に関して

$$f'(x) = 16x^3 + 18x^2 - 6x + 7 \qquad f^{(2)}(x) = 48x^2 + 36x - 6$$

$$f^{(3)}(x) = 96x + 36 \qquad f^{(4)}(x) = 96$$

- これより，次のどちらも $f(x)$ に一致する.

$$f(0) + f'(0)\,x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4$$

$$= -5 + 7x + \frac{-6}{2}x^2 + \frac{36}{6}x^3 + \frac{96}{24}x^4$$

$$f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

$$= 9 + 35(x-1) + \frac{78}{2}(x-1)^2 + \frac{132}{6}(x-1)^3 + \frac{96}{24}(x-1)^4$$

多項式と高次導関数(問題)

問題8.12

- 定理8.10を，関数 $f(x) = 3x^2 - x + 5$ と $a = 0, \pm 1$ に関して確認せよ.
- つまり

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\,x^2$$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$f(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f^{(2)}(-1)}{2!}(x+1)^2$$

が成り立つことを確認せよ.

平均値の定理

- 平均値の定理を思い出す.

定理8.2（平均値の定理）

- 微分可能な関数 $f(x)$ の定義域に $[a, b]$ が含まれるとき

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たす $c \in (a, b)$ が存在する.

- 上記の式は，次と同値である.

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) \qquad \big(c \in (a, x)\big)$$

- 高次導関数を用いて，平均値の定理はテイラーの定理に一般化される.

テイラーの定理

定理8.13（テイラーの定理）

- 開区間 I で定義された関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき，任意の $a \in I$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

を満たす $c \in (a, x)$ が存在する．（$a < x$ の場合）

- 上記の表示を有限テイラー展開という．証明は次回．

マクローリンの定理

- 特に $a = 0$ の場合にはマクローリンの定理と呼ばれる.

定理8.14（マクローリンの定理）

- 0 を含む開区間 I で定義された関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n$$

を満たす $\theta \in (0,1)$ が存在する.（$0 < x$ の場合）

- 上記の表示を有限マクローリン展開という.

テイラーの定理（意味）

- テイラーの定理における

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

はそれぞれ（$n-1$ 次の）テイラー多項式と剰余項と呼ばれる.

- 微分の観点からは，$f(x)$ と $P_{n-1}(x)$ は似ている.

$$f(a) = P_{n-1}(a), f'(a) = P'_{n-1}(a), \dots, f^{(n-1)}(a) = P_{n-1}^{(n-1)}(a)$$

実際，$f(x)$ が n 次多項式であれば，$f(x) = P_n(x)$ であった.

- テイラーの定理は $f(x)$ と $P_{n-1}(x)$ の誤差を $f(x)$ の n 次微分係数を用いて評価できることを主張している.

有限マクローリン展開(例)

例8.15

- $f(x) = e^x$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) = f^{(4)}(x) = e^x$$

であるから

$$f'(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = e^0 = 1$$

したがって

$$e^x = P_5(x) + R_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^{\theta x}}{6!}x^6$$

- これを使って, $f(1) = e$ の近似値を求めると

$$P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60} = 2.71666 \ldots$$

であるが, マクローリンの定理より誤差は

$$|e - P_5(1)| = \frac{e^\theta}{6!} < \frac{e}{6!} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} = 0.004166 \ldots$$

有限マクローリン展開(例)

例8.16

- $f(x) = \sin x$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = \cos x\,, f^{(2)}(x) = -\sin x\,, f^{(3)}(x) = -\cos x\,, f^{(4)}(x) = \sin x$$

を周期4で繰り返すことから

$$f^{(4n)}(0) = 0, f^{(4n+1)}(0) = 1, f^{(4n+2)}(0) = 0, f^{(4n+3)}(0) = -1$$

- したがって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_7(x)$$

- ここで

$$R_7(x) = -\frac{\cos(\theta x)}{7!} x^7$$

ただし $P_5(x) = P_6(x)$ に注意すること.

有限マクローリン展開（問題）

問題8.17

- $f(x) = \cos x$ の有限マクローリン展開を求めなさい.

$$\cos x = P_6(x) + R_7(x)$$

$$P_6(x) = \cdots$$

- $P_6(x)$ を具体的に求めなさい.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{= P_{n-1}(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n}_{= R_n(x)}$$

昇ベキと降ベキ

定義8.17

- 多項式を書くとき，通常は次数が高い方から書く方が多い．例えば

$$5x^3 - x^2 + 5x - 10$$

このような表示を**降ベキ**の順という．

- 一方で，（有限）マクローリン展開などを議論するときは，次数が低い方から書くことが多い．例えば

$$-10 + 5x - x^2 + 5x^3$$

このような表示を**昇ベキ**の順という．

- x が一般の場合には降ベキ，x が十分小さい場合には昇ベキを使うことが多い．

まとめ

1. ロルの定理
   - 平均値の定理
   - コーシーの平均値の定理
   - ロピタルの定理

2. 高次導関数
   - テイラーの定理・マクローリンの定理
   - 有限テイラー展開・有限マクローリン展開