微分・積分
第9回「高次微分と多項式近似2」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

- 前回に引き続いてテイラーの定理に関する話題を議論する.

1. テイラーの定理の証明
2. テイラー展開, 解析的関数
3. 応用, オイラーの公式

関数の多項式近似

- 微分とは，関数を1次多項式（関数）で近似した様子を記述するもので，導関数の情報から関数の増減の解析が可能になった．
- 導関数がさらに微分可能ならば，2回微分することにより凹凸を知ることができた．これは関数を2次多項式で近似することに相当する．
- 関数がさらに微分可能な場合には，3回微分，4回微分，… を考えることにより，与えられた関数の3次多項式，4次多項式，… での近似を考察することができる．
- 一般の関数（三角関数，指数関数，対数関数）などは難しいが，多項式関数は比較的簡単である．

テイラーの定理

定理9.1(テイラーの定理)

- 開区間 I で定義された関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき，任意の $a \in I$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

を満たす $c \in (a, x)$ が存在する.（$a < x$ の場合）

- 上記の表示を**有限テイラー展開**という.

マクローリンの定理

- 特に $a=0$ の場合にはマクローリンの定理と呼ばれる.

定理9.2（マクローリンの定理）

- 0 を含む開区間 I で定義された関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

$$=f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

を満たす $\theta\in(0,1)$ が存在する.（$0<x$ の場合）

- 上記の表示を**有限マクローリン展開**という.

テイラーの定理（意味）

- テイラーの定理における

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

はそれぞれ（$n-1$ 次の）テイラー多項式と剰余項と呼ばれる.

- 微分の観点からは, $f(x)$ と $P_{n-1}(x)$ は似ている.

$$f(a) = P_{n-1}(a), f'(a) = P'_{n-1}(a), \dots, f^{(n-1)}(a) = P_{n-1}^{(n-1)}(a)$$

実際, $f(x)$ が n 次多項式であれば, $f(x) = P_n(x)$ であった.

- テイラーの定理は $f(x)$ と $P_{n-1}(x)$ の誤差を $f(x)$ の n 次微分係数を用いて評価できることを主張している.

有限マクローリン展開(例)

例9.3

- $f(x) = e^x$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) = f^{(4)}(x) = e^x$$

であるから

$$f'(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = e^0 = 1$$

したがって

$$e^x = P_5(x) + R_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^{\theta x}}{6!}x^6$$

- これを使って, $f(1) = e$ の近似値を求めると

$$P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60} = 2.71666\ldots$$

であるが, マクローリンの定理より誤差は

$$|e - P_5(1)| = \frac{e^\theta}{6!} < \frac{e}{6!} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} = 0.004166\ldots$$

コーシーの平均値の定理

- コーシーの平均値の定理を用いて，テイラーの定理を証明する．

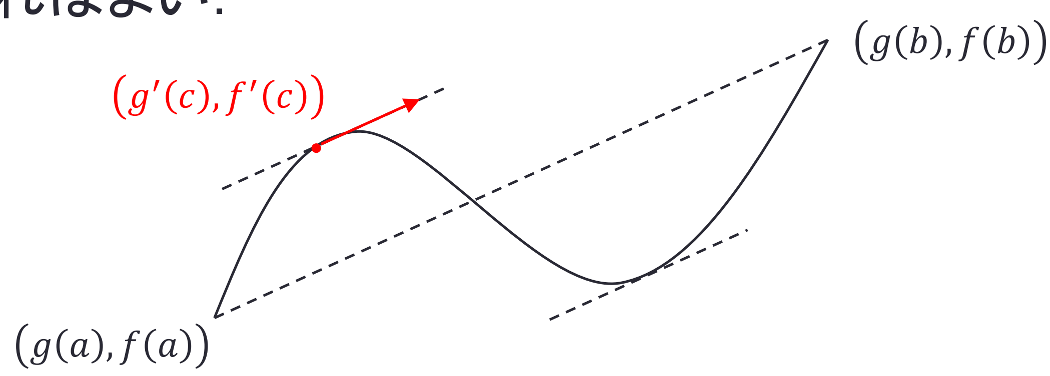
定理9.4（コーシーの平均値の定理）

- 微分可能な関数 $f(x), g(x)$ の定義域に $[a,b]$ が含まれ，$x \in (a,b)$ において $g'(x) \neq 0$ であり，$g(b) - g(a) \neq 0$ であれば

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる $c \in (a,b)$ が存在する．

- 直感的には，媒介変数 $t \in [a,b]$ を用いて $(x,y) = \big(g(t), f(t)\big)$ の軌跡を考えればよい．



テイラーの定理(証明)

- 関数

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= f(x) - \left\{ f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \right\}$$

を考え，これが剰余項 $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ $(a < c < x)$ の形に書けることを示す．

- 簡単な計算で次のことが分かる．
  - $F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots = F^{(n-1)}(a) = 0$
  - $F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$

テイラーの定理(証明)

- $F(x)$ と $G(x) = (x-a)^n$ に対して, コーシーの平均値の定理を使うと
$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)}$$
となる $a < x_1 < x$ が存在する.
- $F'(x)$ と $G'(x) = n(x-a)^{n-1}$ に対して, コーシーの平均値の定理を使うと
$$\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F'(x_1)-F'(a)}{G'(x_1)-G'(a)} = \frac{F''(x_2)}{G''(x_2)}$$
となる $a < x_2 < x_1$ が存在する.
- これを繰り返す.

テイラーの定理(証明)

- まとめると

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F''(x_2)}{G''(x_2)} = \cdots = \frac{F^{(n-1)}(x_{n-1})}{G^{(n-1)}(x_{n-1})} = \frac{F^{(n)}(x_n)}{G^{(n)}(x_n)}$$

となる $a < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < x$ が存在する.

- これにより

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n)}(x_n)}{G^{(n)}(x_n)} = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}$$

なので, $c = x_n$ として

$$F(x) = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}(x-a)^n$$

が示された.

テイラー展開

- C^∞ 級の関数 $f(x)$ に関して，剰余項

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成立すれば，$f(x)$ はベキ級数展開（単項式の無限和として表現）

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

としての表現を持つ.

- 剰余項 $R_n(x)$ に関する条件は，x が a に十分近いときに満たされることが多いが，この講義では深入りしない．（収束半径の議論が必要．）

テイラー展開

定義9.5

- C^{∞} 級の関数 $f(x)$ に関して，剰余項が $R_n(x) \to 0\ (n \to \infty)$ となるとき

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3$$
$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

- この表示を $f(x)$ のテイラー展開と呼ぶ.
- 特に $a=0$ のときは，マクローリン展開と呼ばれる.

マクローリン展開（例）

例9.6

- $f(x) = e^x$ に関して，$f^{(n)}(x) = e^x$ であるから，有限マクローリン展開は

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

ただし $0 < \theta < 1$.

- 任意の x に対して

$$\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

であるから，$f(x) = e^x$ のマクローリン展開は

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

- 簡単のため，$0 < x$ としたが，$0 > x$ でも成り立つ．

マクローリン展開(例)

例9.7

- $f(x) = \sin x$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = \cos x\,, f^{(2)}(x) = -\sin x\,, f^{(3)}(x) = -\cos x\,, f^{(4)}(x) = \sin x$$

を周期4で繰り返すことから

$$f^{(4n)}(0) = 0, f^{(4n+1)}(0) = 1, f^{(4n+2)}(0) = 0, f^{(4n+3)}(0) = -1$$

- したがって

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + R$$

- ただし，剰余項 R は R_{2n} または R_{2n+1} であり，ある $0 < \theta < 1$ に関して

$$R_{2n} = \frac{(-1)^n \sin(\theta x)}{(2n)!} x^{2n} \qquad R_{2n+1} = \frac{(-1)^n \cos(\theta x)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

いずれの場合も $|R_N| \leq \frac{x^N}{N!} \to 0 \ (N \to \infty)$ であるから，$f(x) = \sin x$ のマクローリン展開は

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

マクローリン展開（例）

例9.8

- $f(x)=\cos x$ の有限マクローリン展開も同様に求めることができる.

$$f'(x)=-\sin x\,,f^{(2)}(x)=-\cos x\,,f^{(3)}(x)=\sin x\,,f^{(4)}(x)=\cos x$$

を周期4で繰り返すことから

$$f^{(4n)}(0)=1,f^{(4n+1)}(0)=0,f^{(4n+2)}(0)=-1,f^{(4n+3)}(0)=0$$

- したがって

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

- これらのマクローリン展開からも, $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$ が成り立っていることが分かる.（個別微分）

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

三角関数と弧度法

- 解析学において，三角関数を弧度法で考えることは重要である.
- 実際，度数法の世界では三角関数の基本的な公式は複雑になる $(1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad})$.

1. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}$
2. $\displaystyle (\sin x)' = \frac{\pi}{180} \cos x,\ (\cos x)' = -\frac{\pi}{180} \sin x$
3. $\displaystyle \sin x = \frac{\pi}{180} x - \frac{\pi^3}{180^3} \frac{x^3}{3!} + \frac{\pi^5}{180^5} \frac{x^5}{5!} - \cdots$

- 弧度法では形式的にラジアンという単位を使うが，実際は円の半径と弧の比であるから（長さの単位に依存しない）無次元量である.
- 本来，数は無次元量であり，それゆえ $x + x^3$ のような計算が意味を持つのである.

マクローリン展開(例)

例9.9

- $f(x) = \frac{1}{1-x}$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},\ f^{(3)}(x) = \frac{3\cdot 2}{(1-x)^4},\ \cdots$$

であり，一般に $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ であるから，$0 < \theta < 1$ が存在し

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}} x^n$$

- $0 \leq x < \frac{1}{2}$ であれば

$$\frac{|x|^n}{|1-\theta x|^{n+1}} \leq \frac{|x|^n}{\big|1-|x|\big|^{n+1}} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

であるから，$\frac{1}{1-x}$ のマクローリン展開は

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

- 実際には，$-1 < x < 1$ においてマクローリン展開が成立する．（等比数列の和と思えばよい．）

マクローリン展開(例)

例9.10

- $f(x) = \log(1+x)$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2},\ f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\ \cdots$$

であり，一般に $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ であるから，$0 < \theta < 1$ が存在し

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n(1+\theta x)^n}x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n(1+\theta x)^n}x^n$$

- $0 \leq x \leq 1$ であれば

$$\frac{|(-1)^{n+1}x^n|}{|n(1+\theta x)^n|} \leq \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

であるから，$\log(1+x)$ のマクローリン展開は

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\cdots$$

- 実際は，$-1 < x < 1$ においてマクローリン展開が成立する.

解析関数

定義9.11

- C^∞ 級関数 $f(x)$ が a の近傍で，テイラー展開

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

されるとき，$f(x)$ は a で**解析的**と呼ばれる.

- 定義域の任意の点で解析的な関数を**解析的関数**という.

解析的でない C^∞ 関数

例9.12

- C^∞ 関数であっても，解析的でない関数は存在する.
- 例えば

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

は，原点 0 において解析的ではない.

- 実際

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \to 0 \qquad (x \to +0)$$

といった計算から，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f^{(n)}(0) = 0$ が成り立っている.

- もし，$f(x)$ がマクローリン展開可能だとすると，$f(x) = 0$ となって矛盾する.

近似値の計算

例9.13

- $\sin x$ のマクローリン展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

を用いて，$\sin 1$ の近似値を求める．

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = \frac{101}{120} = 0.84166\ldots$$

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{4241}{5040} = 0.841468\ldots$$

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} = \frac{305353}{362880} = 0.841471\ldots$$

- 実際，$\sin 1 = 0.841470\ldots$

極限の計算

例9.15

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} - \cdots\right) = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \cdots\right) = \frac{1}{2}$$

オイラーの公式（発展）

- 指数関数と三角関数は一見無関係のように思えるが，テイラー展開を考えると類似性が浮かびあがってくる.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

- $i^2 = -1$ なる虚数 i を考えて，指数関数のテイラー展開において，x を ix に置き換えると

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

- e^{ix} が何を意味するかを理解するには，複素関数論を勉強する必要がある.

オイラーの公式(発展)

定理9.16(オイラーの公式)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

- 特に $x = \pi$ として

$$e^{i\pi} = -1$$

は美しい数式として有名である.

レオンハルト・オイラー(Leonhard Euler, 1707年4月15日～1783年9月18日)

arctan のマクローリン展開（発展）

定理9.17

- $\arctan x$ のマクローリン展開

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} + \cdots$$

- $(\arctan x)^{(n)}$ を求めてマクローリン展開を求めるのは少し難しい.

定理9.18

- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ なので，次の公式を得ることができる.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots$$

- これを使って π を求めるのは，収束が遅くかなり大変.

定理9.19（マチンの公式）

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

まとめ

1. テイラーの定理の証明
2. テイラー展開, 解析的関数
3. 応用, オイラーの公式
4. マチンの公式