微分・積分
第11回「不定積分(1)」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

1. 原始関数
2. 不定積分
3. 部分積分

原始関数

- 関数の微分に対する逆の演算を考える

定義11.1

- 関数 $f(x)$, $F(x)$ が開区間 I で定義され

$$F'(x) = f(x)$$

を満たすとき，関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という.

- x^2 と $x^2 + 5$ は共に $2x$ の原始関数である.
- e^x と $e^x + 3$ は共に e^x の原始関数である.
- $\sin x$ と $\sin x - 2$ は共に $\cos x$ の原始関数である.

原始関数の一意性

定理11.2
- 与えられた関数 $f(x)$ の原始関数は定数差を除いて一意的に決まる.
- 実際, $F(x)$, $G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすれば

$$\big(F(x)-G(x)\big)'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$$

であり, 導関数が 0 となる関数は定数関数に限ることから, 原始関数は定数差を除いて一意的に決まることが分かる.

- 定数関数の導関数が 0 であることはすぐ分かるが, 逆は定義から自明ではない.
- 実際, $H'(x)=0$ とすれば, 平均値の定理より任意の $a<b$ に関して $c\in(a,b)$ が存在して

$$H(b)-H(a)=H'(c)(b-a)=0$$

であるから, $H(x)$ は定数関数である.

不定積分

定義11.3

- 関数 $f(x)$ の原始関数全体を不定積分と呼び，原始関数 $F(x)$ を用いて

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

と表す．

- C は積分定数と呼ばれ，原始関数が定数差を除いて一意的に定まることを表す．
- また，$f(x)$ の不定積分を求めることを，積分するといい，$f(x)$ は被積分関数と呼ばれる．

不定積分(例)

例11.4

- 不定積分は微分の逆であるから

1. $\alpha \neq -1$ に対して, $\displaystyle\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$
3. $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C$
4. $\displaystyle\int e^{x} dx = e^{x} + C$

などが成立する.

積分定数に関する注意

- 積分定数に関して注意しておく.
- 関数 $\frac{1}{x}$ の定義域は $(-\infty, 0)$ と $(0, \infty)$ の和集合であるから，厳密には定数 C_1, C_2 を用いて
  - $(x > 0)$: $\int \frac{1}{x} dx = \log x + C_1$
  - $(x < 0)$:$\int \frac{1}{x} dx = \log(-x) + C_2$

  と書かれるべきであるが，これを暗黙の了解として

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

  と書く.（原始関数の差は局所定数関数というのが正しい．）

- 記号の簡略化のために，積分定数はしばしば省略される.
- この講義でも以下では省略する.

不定積分の性質

- 和・差や定数倍の微分は，微分の和・差や定数倍となった．
- 積分に関しても同様である．
- 微分と積分のこの性質は線形性と呼ばれる．

定理11.5

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int \big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\big)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

- 例えば，

$$\int (4x^3 - 5x)\, dx = 4 \int x^3\, dx - 5 \int x\, dx \quad = x^4 - \frac{5}{2} x^2$$

$$\int (\sin x - 2e^x) dx = \int \sin x \;\; dx - 2 \int e^x\, dx = -\cos x - 2e^x$$

不定積分(問題)

問題11.6

- 次の不定積分を計算せよ.

1. $\int (4x^3 - 6x^2 + \sqrt{x} - 1) dx$
2. $\int (e^x - 3\cos x)\, dx$

対数微分の公式から

- 対数微分の定理によると，微分可能な関数 $f(x)$ に対して
$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
であった.
- これを積分の公式で書き換えると.

定理11.7
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|$$

$\tan x$ の積分

例11.8

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\log|\cos x|$$

- 実際,

$$(-\log|\cos x|)' = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$\tan^2 x$ の積分

例11.9

$$\int \tan^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx$$

$$= \tan x - x$$

- 実際,

$$(\tan x - x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

部分積分の公式

- 微分と積分は互いに逆の演算であるから，微分に関する公式は積分の公式に書き直すことができる．

定理11.10（部分積分の公式）

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

- 実際，積の微分法より

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

両辺を積分すると

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

部分積分の公式(例)

例11.11

- 部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

を用いて $\int xe^x dx$ を計算する.

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int (x)' e^x dx$$

$$= xe^x - \int e^x dx \; = xe^x - e^x$$

- 実際,

$$(xe^x - e^x)' = \; e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

部分積分の公式(例)

例11.12

$$\int \log x\,dx = \int (x)' \log x\,dx = x\log x - \int x(\log x)' dx$$

$$= x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x$$

- 実際,

$$(x\log x - x)' = \log x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \log x$$

部分積分の公式(例)

例11.13

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'dx = x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx$$

$$= x\sin x - \int \sin x\ \ dx\ = x\sin x + \cos x$$

- 実際,

$$(x\sin x + \cos x)' = \ \sin x + x\cos x - \sin x\ = x\cos x$$

部分積分の公式（問題）

問題11.14

- 次の不定積分を計算せよ.

1. $\int (3x+1)e^x dx$
2. $\int x \log x \ dx$
3. $\int x^2 \sin x \ dx$
4. $\int x(\log x)^2 \ dx$
5. $\int e^x \cos x \ dx$
6. $\int \frac{\log x}{2\sqrt{x}} \ dx$

まとめ

1. 原始関数
2. 不定積分
3. 部分積分