微分・積分
第12回「不定積分(2)」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

1. 置換積分
2. 部分分数分解，有理関数の積分

原始関数と不定積分

定義12.1

- 関数 $f(x)$, $F(x)$ が開区間 I で定義され
$$F'(x) = f(x)$$
を満たすとき，関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という.

定義12.2

- 関数 $f(x)$ の原始関数全体を不定積分と呼び，原始関数 $F(x)$ を用いて
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$
と表す.
- C は積分定数と呼ばれ，原始関数が定数差を除いて一意的に定まることを表す.
- また，$f(x)$ の不定積分を求めることを，積分するといい，$f(x)$ は被積分関数と呼ばれる.

不定積分(例)

例12.3

1. $\alpha \neq -1$ に対して， $\displaystyle\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$
3. $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$
4. $\displaystyle\int e^{x} dx = e^{x} + C$

などが成立する.

不定積分の性質

定理12.3

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int \big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\big)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

定理12.4

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log|f(x)|$$

定理12.5（部分積分の公式）

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

- 部分積分の公式は，積の微分法より導かれる.

置換積分

定理12.6（置換積分の公式）

- 関数 $f(x)$ の変数 x が別の変数 t の C^1 級関数 $x=\phi(t)$ として表されるとき

$$\int f(x)\,dx=\int f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt$$

ここで左辺 $\int f(x)\,dx$ は t の関数と考えている.

- 置換積分の公式は積分する変数を x から t に変換するための公式である.
- 微分記号 $\phi'(t)=\dfrac{dx}{dt}$ を分数のように扱って，$\dfrac{dx}{dt}dt=dx$ と考えることができる.
- $F(x)=\int f(x)dx$ とすれば，合成関数の微分法により

$$\Big(F\big(\phi(t)\big)\Big)'=F'\big(\phi(t)\big)\phi'(t)=f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)$$

これを t で積分して

$$F\big(\phi(t)\big)=\int f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)dt$$

- このように置換積分は合成関数の微分法の逆操作といえる.

置換積分(例)

例12.7

- $\int (5x-2)^3 dx$ を置換積分で計算する.
- $t = 5x - 2$ とすれば, $x = \frac{1}{5}(t+2)$ であるから

$$\int (5x-2)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{20} t^4 = \frac{1}{20}(5x-2)^4$$

- 実際,

$$\left(\frac{1}{20}(5x-2)^4\right)' = \frac{1}{20} \cdot 4(5x-2)^3 \cdot 5 = (5x-2)^3$$

- また, 逆関数の微分法より, $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{5}$ に注意する.

置換積分(例)(つづき)

- $\int (5x-2)^3 dx$ を置換積分ではなく，展開して積分すると，

$$\int (5x-2)^3 dx = \int 125x^3 - 150x^2 + 60x - 8\, dx$$

$$= \frac{125}{4}x^4 - 50x^3 + 30x^2 - 8x$$

- 置換積分の結果を展開すると，

$$\frac{1}{20}(5x-2)^4 = \frac{1}{20}(625x^4 - 1000x^3 + 600x^2 - 160x + 16)$$

となり，定数の差を除いて一致する．

置換積分(例)

例12.8

- $\int \frac{1}{-7x+5} dx$ を置換積分で計算する.
- $t = -7x + 5$ とすれば, $x = -\frac{1}{7}(t - 5)$ であるから

$$\int \frac{1}{-7x + 5} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{7} \log|t| = -\frac{1}{7} \log|-7x + 5|$$

- 実際,

$$\left(-\frac{1}{7}\log|-7x + 5|\right)' = -\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{-7x + 5} \cdot (-7) = \frac{1}{-7x + 5}$$

置換積分（例）

例12.9

- $\int \frac{x^3+1}{x^4+4x}dx$ を置換積分で計算する.
- $t = x^4 + 4x$ とすれば, $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{4(x^3+1)}$ であるから

$$\int \frac{x^3+1}{x^4+4x}dx = \int \frac{x^3+1}{t} \cdot \frac{1}{4(x^3+1)}dt$$

$$= \int \frac{1}{4t}dt = \frac{1}{4}\log|t| = \frac{1}{4}\log|x^4+4x|$$

- 実際,

$$\left(\frac{1}{4}\log|x^4+4x|\right)' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^4+4x} \cdot 4(x^3+1) = \frac{x^3+1}{x^4+4x}$$

対数微分の公式から

- 対数微分の公式から得られた積分の公式は，置換積分を使って証明することもできる.

定理12.10

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|$$

- $f(x) = t$ として置換積分する.
- $\frac{dt}{dx} = f'(x)$ なので，$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{f'(x)}$ であるから

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{f'(x)}{t} \cdot \frac{1}{f'(x)}dt = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| = \log|f(x)|$$

E

置換積分(問題)

問題12.11

- 次の不定積分を計算せよ.

1. $\int \frac{1}{\tan x} dx \qquad (t = \sin x)$
2. $\int \frac{1}{x \log x} dx \qquad (t = \log x)$
3. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx \qquad (t = 1 + e^x)$

部分分数分解(例)

例12.12

- 有理関数の不定積分 $\int \frac{x-1}{x(x+1)} dx$ を計算したい.
- 被積分関数 $\frac{x-1}{x(x+1)}$ を，計算しやすい $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ という形に変形する.

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)}{x(x+1)} + \frac{b\,x}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$$

- 右辺が被積分とすると，$a = -1, b = 2$. つまり

$$\frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x+1}$$

- このように，分母の因数分解に現れる因子それぞれを分母に持つように有理関数を分解することを**部分分数分解**という.

$$\int \frac{x-1}{x(x+1)} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x+1} \right) dx \quad = - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{x+1} dx$$

$$= -\log|x| + 2\log|x+1| = \log \frac{(x+1)^2}{|x|}$$

部分分数分解

- 部分分数分解の一般論は少し複雑なので，基本的な場合を扱うことにする.

定理12.13

- 有理関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ に関して

1. $f(x)$ の次数 $<$ $g(x)$ の次数
2. $g(x)$ は一次式の積に分解することができる.

$$g(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_1)^{k_2} \cdots (x - a_i)^{k_i}$$

このとき，$\frac{f(x)}{g(x)}$ は次の形の関数の和として表すことができる.

$$\frac{c_j}{(x - a_j)^{l_j}} \qquad \left(c_j \in \mathbb{R}, 1 \leq l_j \leq k_j\right)$$

部分分数分解(例)

例12.14

- $\frac{x+2}{x^2(x+1)}$ の部分分数分解を求める.

$$\frac{x+2}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} = \frac{(a+c)x^2 + (a+b)x + b}{x^2(x+1)}$$

を満たす $a, b, c \in \mathbb{R}$ は, $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$ であるから

$$\frac{x+2}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

- 定理11.17において, 仮定「$f(x)$ の次数 $<$ $g(x)$ の次数」は本質的ではない.
- 実際, 仮定が成り立たない場合には, $f(x)$ を $g(x)$ で割ることができ, $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ を満たす多項式 $q(x), r(x)$ で $r(x)$ の次数 $< g(x)$ の次数となるものが一意的に存在するので, $\frac{r(x)}{g(x)}$ を部分分数分解すればよい.

有理関数の積分

定理12.15

- $\frac{1}{(x-a)^n}$ の不定積分は

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \log|x-a| & (n=1) \\ \dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} & (n \geq 2) \end{cases}$$

- したがって，部分分数分解を利用して多くの有理関数の不定積分を求めることができる.

$$\int \frac{x+2}{x^2(x+1)}dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= -\log|x| - \frac{2}{x} + \log|x+1| = \log\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{2}{x}$$

E

有理関数の積分(問題)

問題12.16

- 次の不定積分を計算せよ.

1. $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$
2. $\int \frac{2x+3}{(x+1)^2}dx$
3. $\int \frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}dx$

積分の計算手順

1. 基本となる関数は積分の公式を用いる.

$$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1), \quad \frac{1}{x}, \quad e^x, \quad \alpha^x, \quad \log x, \quad \sin x, \cos x, \quad \tan x$$

2. $f(ax+b)$ で f が基本となる関数の場合には，$ax+b=t$ とおいて置換積分する.
3. 有理関数は，分子の次数を下げ，その後，部分分数に分解する.
4. 三角関数は1次化を図る．あるいは，次の形に変形して置換積分する.
   - $f(\sin x)\cos x$ に変形して $\sin x = t$ とおいて置換積分する.
   - $f(\cos x)\sin x$ に変形して $\cos x = t$ とおいて置換積分する.
   - $f(\tan x)\dfrac{1}{\cos^2 x}$ に変形して $\tan x = t$ とおいて置換積分する.
5. 関数の積の形で，一方を微分すると簡単になる場合には，部分積分を利用する.

まとめ

1. 置換積分
2. 部分分数分解
3. 有理関数の積分