微分・積分
第3回「関数の極限と連続性」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

1. 極限
    - 右極限
    - 左極限
    - 極限
    - 極限の性質

2. 連続
    - 点連続
    - 連続関数
    - 中間値の定理

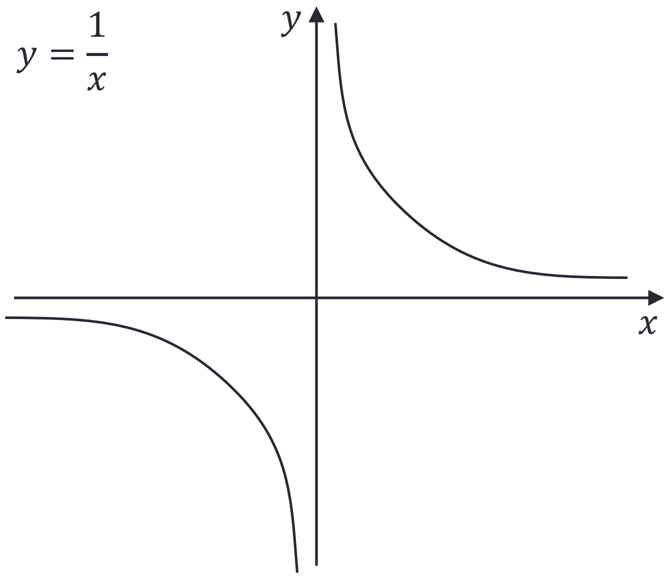
3. 不定形の極限

極限

- 除法において，0 で割ることはできない.
  - $1/0$ や $0/0$ は存在しない.
- 無限大 ∞ という数は存在しない.
  - $\infty - 0$, $1/\infty$, $\infty - \infty$ などは意味を持たない.
- しばしば，$1/0$, $1/\infty$, $\infty - \infty$ などに近いものを扱う必要がある.
  - 微分：微小変化（$0/0$ に近いもの）を評価する.
  - 積分：微小量の無限和（$\infty \times 0$ に近いもの）を評価する.
- このようなものを数学的に適切に扱うために，‘極限’の概念が必要になる.

右極限･左極限

- 関数の値の‘極限’を考えたい.
- 例えば, 関数 $1/x$ は原点 0 では定義されないが, 原点の近傍では定義されている.
- $x > 0$ の方から原点に近づくと, 関数の値は正の値で発散, つまり $+\infty$ になる.
- $x < 0$ の方から原点に近づくと, 関数の値は負の値で発散, つまり $-\infty$ になる.



右極限

定義3.1

- 関数 $f(x)$ に関して，$x > a$ を満たしながら x が a に近づくとき
  - $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束することを次のように表す．

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$$

  - $f(x)$ がいくらでも大きく（小さく）なることを，正（負）の無限大に発散するといい，次のように表す．

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

- これらを $f(x)$ の a における**右極限**という．

- $a = 0$ の場合は特別で，$x \to 0 + 0$ と書かずに，$x \to +0$ と書く．

左極限

定義3.2

- 関数 $f(x)$ にかんして，$x < a$ を満たしながら x が a に近づくとき
  - $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束することを次のように表す．

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$$

  - $f(x)$ がいくらでも大きく（小さく）なることを，正（負）の無限大に発散するといい，次のように表す．

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

- これらを $f(x)$ の a における左極限という．

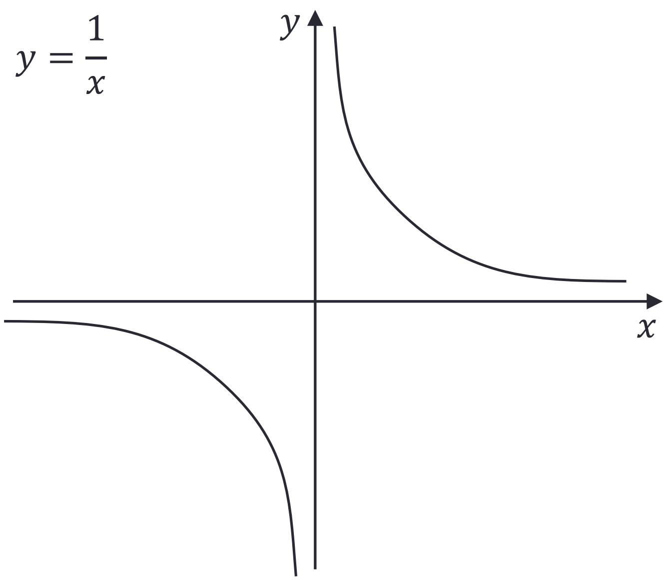
- $a = 0$ の場合は特別で，$x \to 0 - 0$ と書かずに，$x \to -0$ と書く．

片側極限

- 右極限と左極限は片側極限とも呼ばれる.
- 関数 $f(x)$ の a における右極限と左極限は一般に一致しない.
- $f(a)$ は定義されるとは限らないし，定義されていても極限と一致するとは限らない.

例3.3

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to +0} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty$

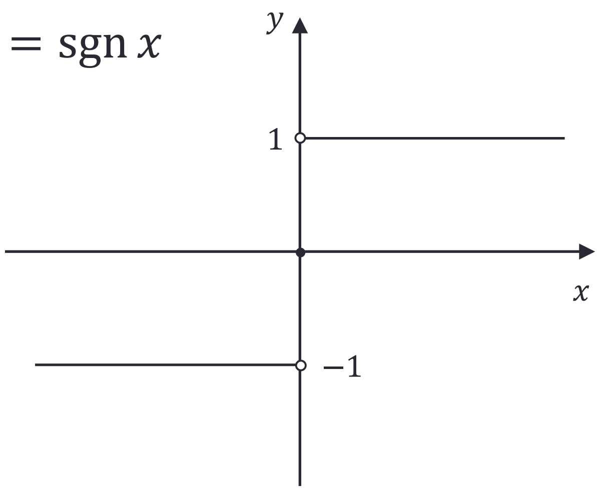


片側極限

例3.4

- $f(x) = \operatorname{sgn} x$
- $\operatorname{sgn} 0 = 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to +0} \operatorname{sgn} x = 1$
- $\displaystyle\lim_{x \to -0} \operatorname{sgn} x = -1$

$y = \operatorname{sgn} x$



極限

定義3.5

- 関数 $f(x)$ の a における右極限と左極限が存在し，それらが一致するとき，その値を

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

と書いて，$f(x)$ の a における**極限**という．

- つまり，x が a にどのような近づき方をしても，その値があいまいなく定まるときに極限が定義される．
- 定義より，極限が存在するとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x)$$

極限（例）

例3.6

- 右極限と左極限が一致しないので，極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$$

は存在しない．

例3.7

- 一方で

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{|x|}=\lim_{x\to -0}\frac{1}{|x|}=+\infty$$

であるから，極限が存在して

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$$

極限(問題)

- 問題3.8
- $\lim_{x\to+0}|x|,\ \lim_{x\to-0}|x|$ を求めよ.
- $\lim_{x\to0}|x|$ は存在するか?

- 問題3.9
- $\lim_{x\to+0}\mathrm{sgn}(|x|),\ \lim_{x\to-0}\mathrm{sgn}(|x|)$ を求めよ.
- $\lim_{x\to0}\mathrm{sgn}(|x|)$ は存在するか?

- 問題3.10
- $\lim_{x\to+0}(x^2-x)/|x|,\ \lim_{x\to-0}(x^2-x)/|x|$ を求めよ.
- $\lim_{x\to0}(x^2-x)/|x|$ は存在するか?

極限（注意事項）

注意3.11

- 「x が a に近づくときに，$f(x)$ が α に収束する」を厳密に定義するには，ε-δ 論法を用いる必要があるが，この講義では扱わない．
- $1/x$ の例からも分かるように，x の近くづく先 a が定義域に含まれている必要はない．
- つまり $f(a)$ が定義されていなくても，$\lim_{x \to a+0} f(x)$ などの極限は議論できる．
- 一方で，a が f の定義域 D 内の点で近似できないと $f(x)$ の a における極限は定義できない．
- つまり，a は D もしくはその境界 ∂D に含まれる必要がある．（閉包 $\overline{D} = D \cup \partial D$）

- 本講義は入門的な位置づけなので，厳密性にはあまりこだわらないで議論を進める．

極限の性質

定理3.12

- $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha,\ \lim_{x\to a} g(x) = \beta$ で $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする. このとき
  - $\lim_{x\to a} c\, f(x) = c\, \alpha$
  - $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \alpha + \beta$
  - $\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \alpha\, \beta$
  - $\beta \neq 0$ であれば, $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$
  - a の近傍で $f(x) \leq g(x)$ であれば, $\alpha \leq \beta$

- 最後の主張は少し注意が必要で, a の近傍で $f(x) < g(x)$ であっても $\alpha < \beta$ とは限らない. ($f(x) < g(x)$ であれば $f(x) \leq g(x)$ なので, $\alpha \leq \beta$ は正しい.)

極限の性質(問題)

問題3.13

- 次を計算せよ.

1. $\lim_{x \to 1}(x^2 + 3x + 5)$
2. $\lim_{x \to 0}(2x + 5)\,\mathrm{sgn}(|x|)$

問題3.14

- 0 の近傍で $f(x) < g(x)$ であり, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x)$ となる関数 $f(x), g(x)$ を1つ見つけよ.

$\pm\infty$ に対する極限

- これまでは $a \in \mathbb{R}$ に対して極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ を考えていたが，$a = \pm\infty$ に対しても同様の議論ができる．次の定義は厳密には不十分であるが，この講義では特に問題にならない．

定義3.15

- x が十分に大きくなるとき，$f(x)$ が α に収束することを

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$$

- x が十分に小さくいなるとき，$f(x)$ が α に収束することを

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$$

と書く．

連続

定義3.16

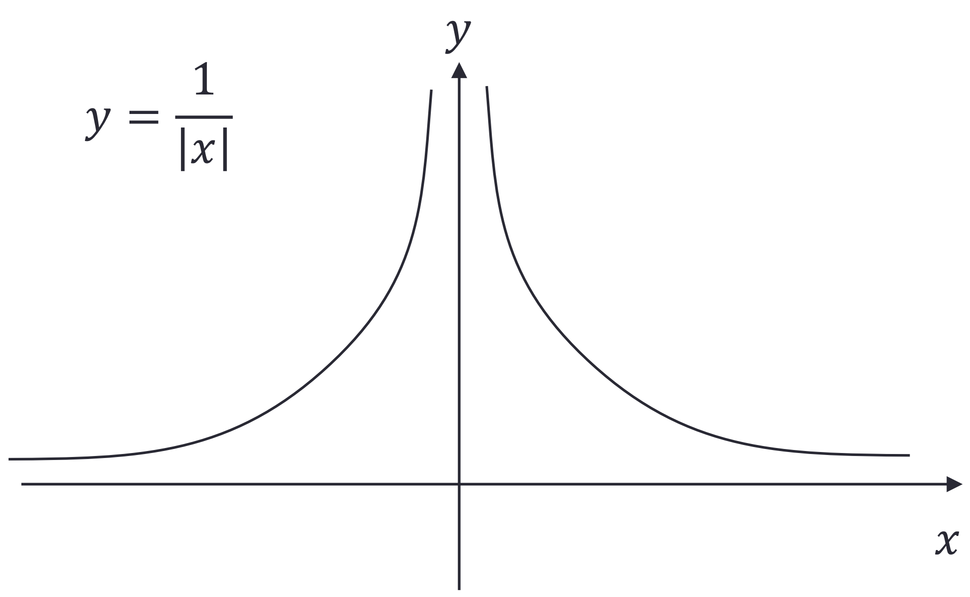
- $f(x)$ が a で連続であるとは
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
が成り立つ場合をいう．つまり，極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在し，$f(a) \in \mathbb{R}$ が定義され，それらが一致する場合である．
- 連続でないとき，不連続であるという．
- $f(x)$ の定義域のすべての点において連続である場合，$f(x)$ は連続関数であるという．

- $f(x)$ が a で連続であるとき，$\lim_{x \to a} f(x) \neq \pm\infty$ であることに注意．

不連続

例3.17

- $1/x$ や $\mathrm{sgn}(x)$ は 0 において不連続.（$x \neq 0$ では連続）
- $1/|x|$ は $1/|0|$ が定義されないから, 0 において不連続.
  （$\lim_{x \to 0} 1/|x| = +\infty$ でもある. ）

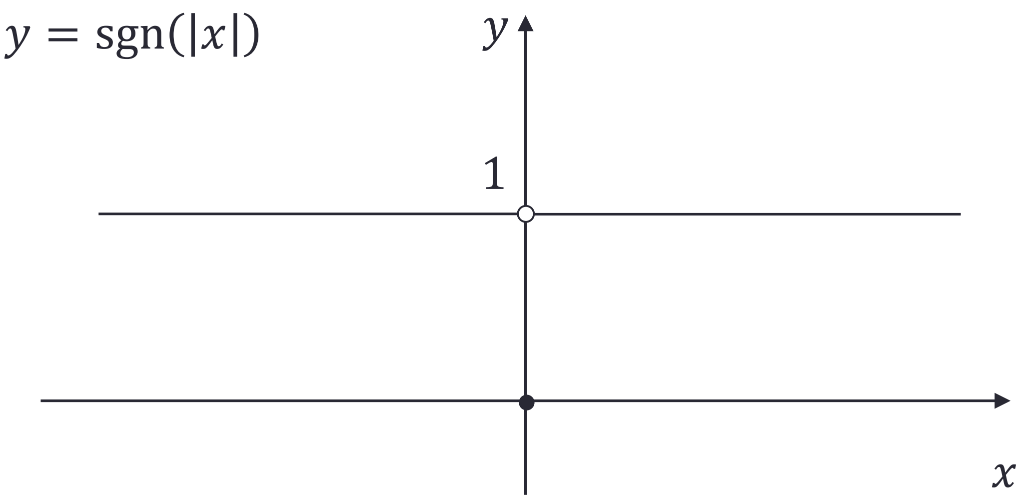


不連続

例3.18

- $\mathrm{sgn}(|x|)$ は，$\lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}(|x|)$ が存在し，$\mathrm{sgn}(|0|)$ も定義されるが

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}(|x|) \neq \mathrm{sgn}(|0|)$$

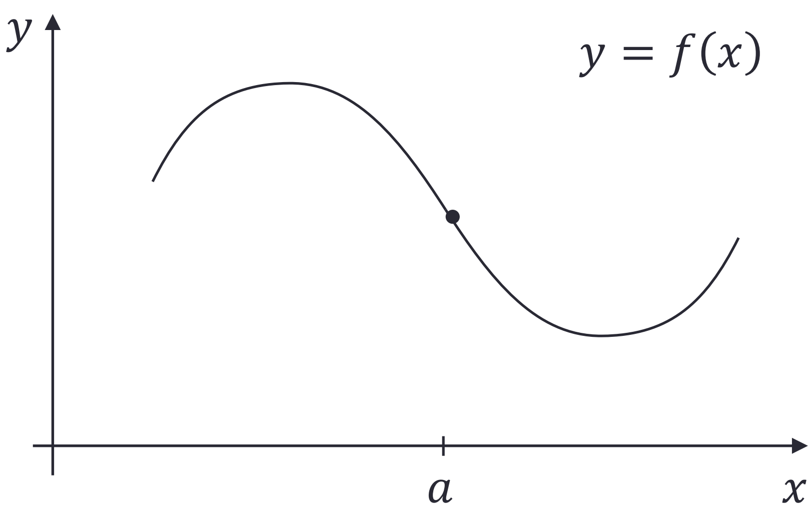


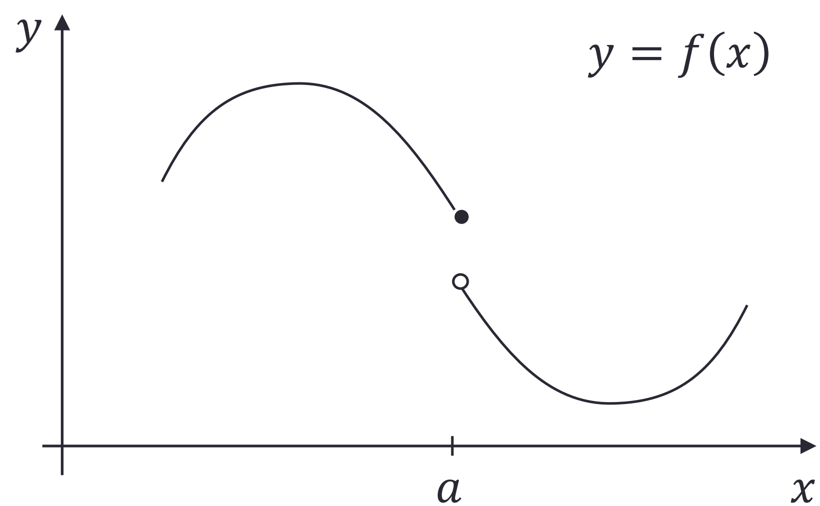
$$\lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}(|x|) = 1$$

$$\mathrm{sgn}(|0|) = 0$$

連続関数の直感

- 関数 $f(x)$ が a において連続とは，$f(x)$ のグラフが $(a, f(a))$ でつながっているという直感を持てばよい．





- 左図の関数は a で連続，右図の関数は a で不連続．
- 連続関数とは，グラフが（定義域において）つながっている．左図のような関数．

連続(問題)

問題3.19

- 次の関数のグラフを描け. また, これらは連続関数か?

1. $|x(x+3)(x-2)|$
2. $\operatorname{sgn}(\sin x)$

連続関数の加減乗除

定理3.20

- $f(x), g(x)$ が a において連続であるとする.
  - $c\, f(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)\, g(x)$ は a において連続である.
  - $g(a) \neq 0$ であれば, $f(x)/g(x)$ は a において連続である.

- 恒等関数 $f(x) = x$ が連続関数であることから, 多項式関数が, 有理関数も(定義域において)連続関数である.
- 三角関数, 指数関数, 対数関数は連続関数であることが知られているため, $2\sin x - 3\log x$ や $e^x \cos x$ なども連続関数である.

合成関数の連続性

定理3.21

- 関数 $f(x), g(x)$ に関して,
  - 関数 $g(x)$ は a において連続であり,
  - 関数 $f(x)$ の定義域が $g(a)$ を含み $g(a)$ において連続であるとき,
- 合成関数 $f\big(g(x)\big)$ も a において連続である.

例3.22

- 次の関数は連続関数である.

$$\sin(x^3 + 5x + 2) \qquad\qquad e^{x^3} + \log(x^2 + 1)$$

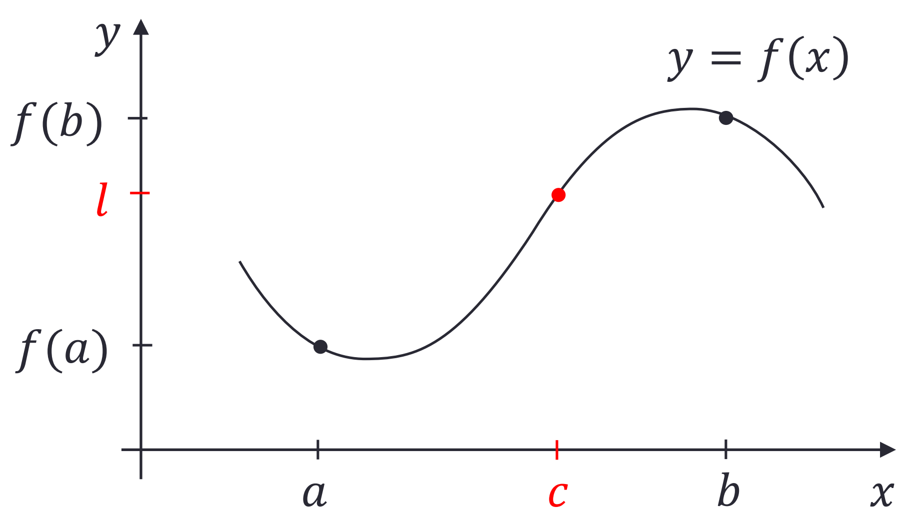
- 他にも, $\log(x + 1)$ は $x \leq -1$ で定義されないが, $x > -1$ において連続である.

中間値の定理

- 連続関数に関する最も重要な定理が，次の中間値の定理である.

定理3.23（中間値の定理）

- 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で，$f(a) < f(b)$ であるとき，
- 任意の $l \in [f(a), f(b)]$ に対して，$l = f(c)$ となる点 $c \in [a,b]$ が存在する.



極限計算

- 定義より，関数が連続な点に関しては，極限値を単に代入して求めることができる.

例3.24

- $(x^2+2x-3)/(x^2-1)$ は $x \neq \pm 1$ において連続であるから

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\frac{3^2+2\cdot 3-3}{3^2-1}=\frac{3}{2}$$

- 一方で，1 は $(x^2+2x-3)/(x^2-1)$ の定義域に入っていないため，この点においてこの関数は連続でない．無理に代入すると

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\frac{1^2+2\cdot 1-3}{1^2-1}=\frac{0}{0}\qquad ??$$

- しかし，$x\to 1$ において $x-1\neq 0$ であるから，次のように極限が求まる.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}=\frac{1+3}{1+1}=2$$

不定形

- 一般に, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ といった形は不定形と呼ばれる.
- 特別な場合には，これらは数学的に意味を持ち，計算可能である.

例3.25

1. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2-10}{7x^3+5x+2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(3x^3+2x^2)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+100}-\sqrt{x}\right)$

不定形(例)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2+2x+4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=-1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2-10}{7x^3+5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{2}{x}-\frac{10}{x^3}}{7+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{4}{7}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^3+2x^2)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(3+\frac{2}{x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+100}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+100}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+100}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+100}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{100}{\sqrt{x+100}+\sqrt{x}}=0$$

不定形(問題)

問題3.26

- 次の極限を計算しなさい.

1. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
2. $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - x^2 - 4x + 3}{x^3 + x^2 - x + 1}$
3. $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - x + 2}{-6x^2 + 3x + 1}$
4. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 4x^2 - x - 2}$

まとめ

1. 極限
    - 右極限
    - 左極限
    - 極限
    - 極限の性質

2. 連続
    - 点連続
    - 連続関数
    - 中間値の定理

3. 不定形の極限

発展：ε-δ論法

- $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b$
  - 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

    $$0 < |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - b| < \delta$$

- $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty$
  - 任意の $K > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

    $$0 < |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) > K$$

- $\displaystyle\lim_{x\to \infty} f(x) = b$
  - 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $L > 0$ が存在して

    $$x > L \Longrightarrow |f(x) - b| < \delta$$

- $\displaystyle\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$
  - 任意の $K > 0$ に対して，ある $L > 0$ が存在して

    $$x > L \Longrightarrow f(x) > K$$