微分･積分
第4回「微分の基礎」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

1. 平均変化率, 微分係数, 接線の傾き

2. 導関数, 導関数の性質

極限の別表示

- 前回，関数 $f(x)$ の a における極限を，

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$$

であるときに，$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ と定義した．

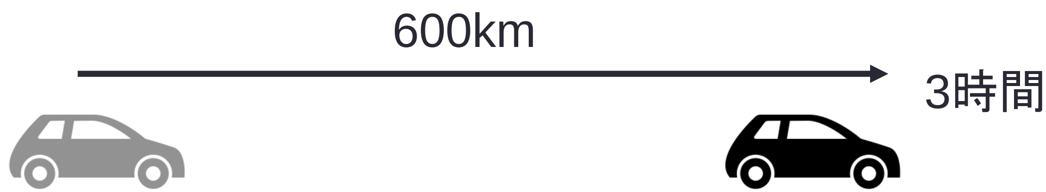
- 上記の条件は，$x = a + h$ と表すと，

$$\lim_{h\to +0} f(a+h) = \lim_{h\to -0} f(a+h) = \alpha$$

と同値であり，これを $\lim_{h\to 0} f(a+h) = \alpha$ と書く．

- 今回の講義では後者の記号を用いる．

平均変化率



問題4.1

- 600km の移動に 3 時間かかったとき，速度は何 km/h だろうか?

- 答えは簡単で，

$$\frac{600\ \mathrm{km}}{3\ 時間} = 200\ \mathrm{km/h}$$

と答えたくなる.

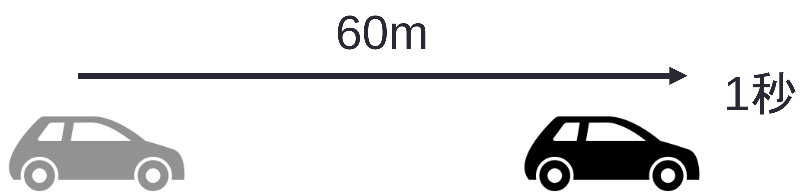
- しかしながら，これは平均速度であり，常に一定の速度で移動するとは限らない．つまり，ある特定の時刻での速度は必ずしも 200 km/h になるとは限らない.

- この問題設定からは，平均速度しか求めることができない.

平均変化率

問題4.2

- 出発からちょうど1時間後の速度はどのように求めれば良いだろうか?



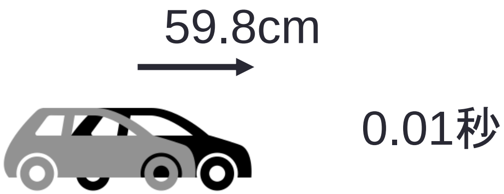
- 出発してから1時間後において，1秒間に60m移動していたとすると，

$$\frac{60\ \mathrm{m}}{1\ \text{秒}} = \frac{0.06\ \mathrm{km}}{1/3600\ \text{時間}} = 216\ \mathrm{km/h}$$

と答えたくなる.

- しかしながら，時間スケールを変えただけで，状況は先の問題と変わっていない.
- これは1秒間の平均速度であり，1秒間の間に速度が変化している可能性がある.

平均変化率



- 時間をさらに細かく刻んで 0.01 秒間にどれだけ移動したかを計測したところ，59.8cm 移動したことが判明した．
- すると，この 0.01 秒間の平均速度は

$$\frac{59.8\mathrm{cm}}{0.01\text{秒}} = \frac{0.000598\mathrm{km}}{1/360000\text{時間}} = 215.28\mathrm{km/h}$$

となる．

- もちろん，この 0.01 秒間の間に速度が変化している可能性があるが，良い近似になっていることが期待される．

平均変化率

- 一般に，時間軸をどんどん短くすることで，その時刻での速度をより正確に測定できることが期待される．
- つまり，ある時刻での速度は，

$$\frac{\text{微小な位置の変化}}{\text{微小な時間の変化}}$$

の極限として得られると考えられる．

- このような極限を扱う理論が，微分である．

微分係数

定義4.3

- 関数 $f(x)$ の定義域を D とする.
- 点 $a \in D$ に関して，極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき，$f(x)$ は a で**微分可能**であるといい，$f'(a)$ で表す.

- $f'(a)$ は $f(x)$ の a における**微分係数**と呼ばれる.

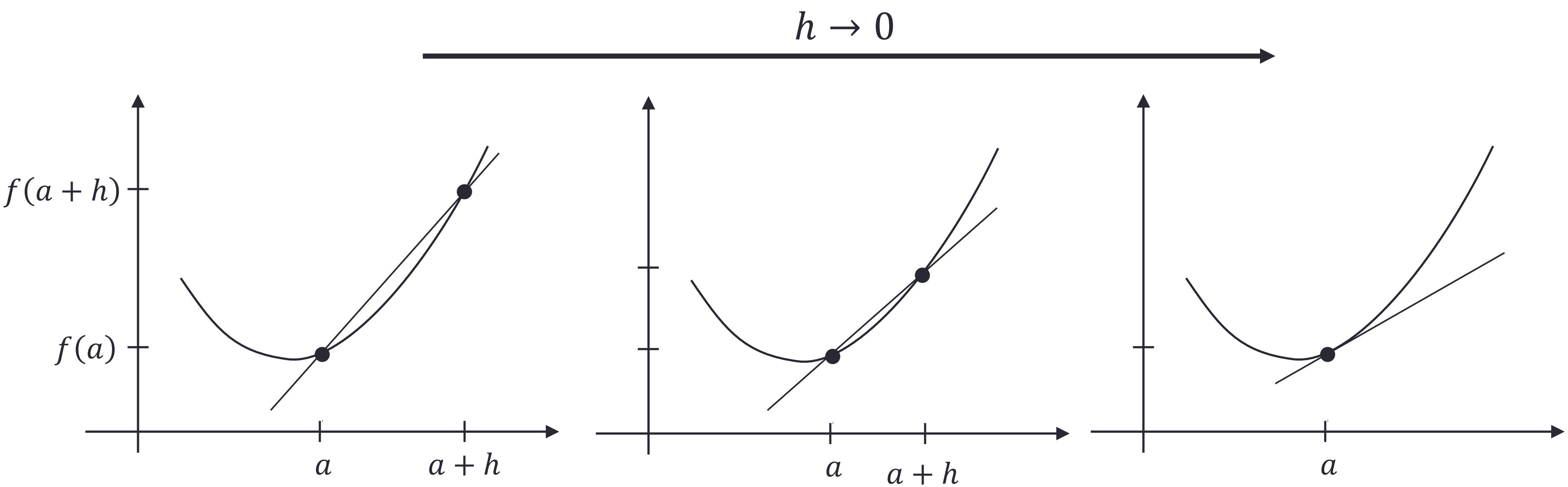
- $f(x)$ が a で微分可能ならば，$f(x)$ は a で連続であることが分かるが，その逆は一般には成立しない.

微分係数と接線の傾き

- 微分係数

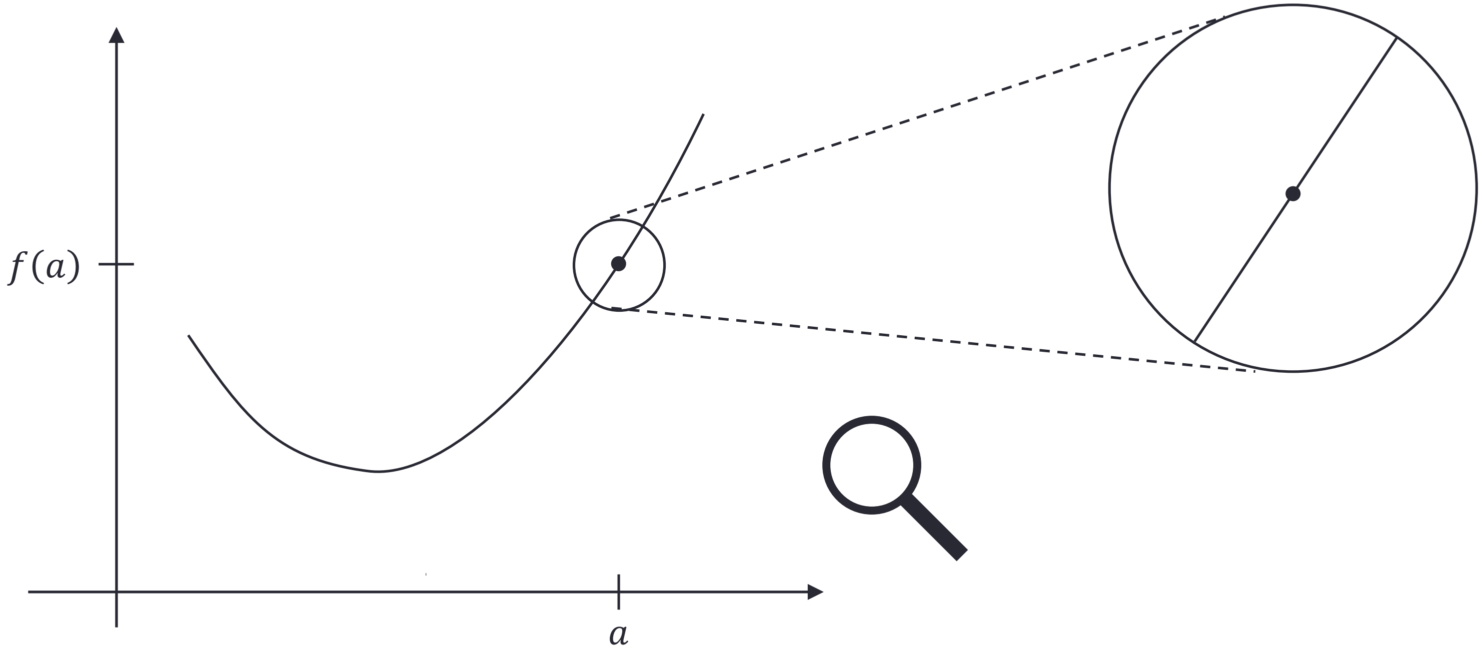
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

は $f(x)$ のグラフの点 $\left(a, f(a)\right)$ における接線の傾きとみなすことができる.



微分可能性

- 関数 $f(x)$ が a において微分可能であることは, $f(x)$ のグラフが点 $\left(a, f(a)\right)$ における接線が定義できるくらいなめらかであることを意味する.
- 点 $\left(a, f(a)\right)$ の近傍でグラフが直線のように見えるともいえる.



導関数

定義4.4

- 関数 $f(x)$ がその定義域 D の任意の点において微分可能であるとする.
- $a \in D$ に対して，その点における微分係数 $f'(a)$ を返す関数

$$f' : D \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto f'(a)$$

を $f(x)$ の導関数と呼び，$f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を微分するという.

- $f'(x)$ は $\frac{df}{dx}(x)$ と書かれる場合もある.

導関数(x, x^2)

例4.5

- $f(x) = x$ の導関数を定義に従って計算する.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$f(x) = x$ のグラフの点 (a, a) における接線の傾きは 1.

- $f(x) = x^2$ の導関数を定義に従って計算する.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

$f(x) = x^2$ のグラフの点 (a, a^2) における接線の傾きは $2a$.

導関数(x^3)

問題4.6

- $f(x) = x^3$ の導関数を定義に従って計算せよ．つまり

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

を求めよ．

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2$$

- $f(x) = x^3$ のグラフの点 (a, a^3) における接線の傾きは $3a^2$.

導関数(x^n)

定理4.7

- $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f(x) = x^n$ の導関数は $f'(x) = n\,x^{n-1}$ である.

- $f(x) = x^n$ の導関数を定義にしたがって計算すると

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{n\,h\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h^2 x^{n-2} + \cdots + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(n\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h\,x^{n-2} + \cdots + h^{n-1} \right)$$

$$= n\,x^{n-1}$$

- $f(x) = x^n$ のグラフの点 (a, a^n) における接線の傾きは $n\,a^{n-1}$.

導関数(定数)

定理4.8

- 定数関数 $f(x) = c$ の導関数は $f'(x) = 0$ である.

- $f(x) = c$ の導関数を定義にしたがって計算すると

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

- $f(x) = c$ のグラフの点 (a, c) における接線の傾きは 0.

微分の性質

定理4.9

- $f(x), g(x)$ を（共通の定義域で）微分可能な関数とする.

1. $\left(a\,f(x)+b\,g(x)\right)' = a\,f'(x)+b\,g'(x) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$
2. $\left(f(x)\,g(x)\right)' = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

- これから

$$(f(x)^2)' = 2f'(x)\,f(x) \qquad \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

などが分かる.

多項式の微分

- 定理4.9を使うと，多項式の導関数は簡単に計算できる．

例4.10

- $(3x^2 - 5x + 1)' = 6x - 5$
- $(x^4 - 15x^2 + 5x + \pi)' = 4x^3 - 30x + 5$
- $(-x^{100} + 57x^2 + \pi\, x + \log_2 7)' = -100x^{99} + 114x + \pi$

- 関数のグラフが描けなくても，接線の傾きはすぐ分かる．

積の微分

例4.11

- $(x^3+5)(4x+1)$ の導関数を2通りの方法で計算する.
- 定理4.9(2)を使うと

$$\big((x^3+5)(4x+1)\big)' = (x^3+5)'(4x+1) + (x^3+5)(4x+1)'$$
$$= 3x^2(4x+1) + (x^3+5)\cdot 4$$
$$= 16x^3+3x^2+20$$

- 微分の計算の前に展開すれば

$$\big((x^3+5)(4x+1)\big)' = (4x^4+x^3+20x+5)'$$
$$= 16x^3+3x^2+20$$

導関数$(1/x^n)$

定理4.12

- 有理関数 $f(x) = \frac{1}{x^n}$ の導関数は $f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$ である.

- 逆数の微分公式 $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$ を用いると

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{n\,x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

定理4.13

- $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $f(x) = x^n$ の導関数は $f'(x) = n\,x^{n-1}$ である.

微分可能なら連続

定理4.14

- 関数 $f(x)$ は a で微分可能であれば，連続である.

- 実際

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ が有限の値として存在}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \text{ が存在してその値が } f(a) \text{ と一致する}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ が } x=a \text{ で連続}$$

- 対偶を考えれば，「a で連続でなければ，微分可能ではない」とも表現できる.

導関数の非存在

- 関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続でなければ微分可能でないが，連続であっても微分可能とは限らない．

例4.15

- $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分不可能である．
- 直感的には，$x = 0$ で接線が引けないからである．
- $f(x) = |x|$ が $x = 0$ で微分可能であれば，極限

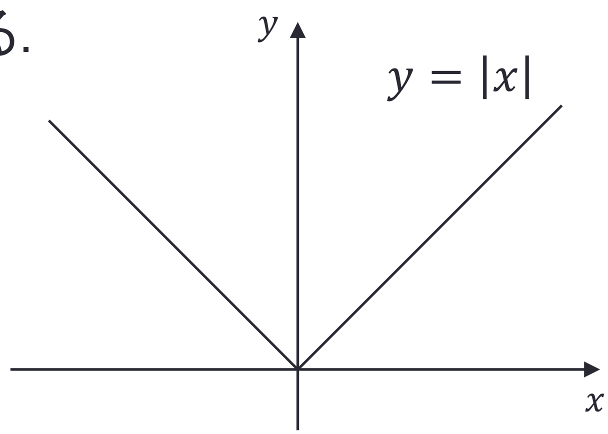
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

が存在するはずであるが．

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{-h}{h} = -1$$

となり右極限と左極限は一致しない．



導関数の計算

問題4.16

- $(3x^2+5)(x^3+x)$ の導関数を（1）展開してから計算，（2）積の微分公式を用いて計算，の2通りで求め，答えが一致することを確かめよ.

問題4.17

- $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ の導関数を計算せよ.

問題4.18

- $\frac{x}{x+1}-(x+1)(x^2-4)$ の導関数を計算せよ.

定理4.9(2)の証明(発展)

- 公式 $\left(f(x)\,g(x)\right)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ を証明する.

$$\left(f(x)\,g(x)\right)'$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + \lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

定理4.9(3)の証明(発展)

- 公式 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ を証明する.
- $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}g(x)$ に積の微分の公式を適用すると

$$f'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}g(x)\right)' = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' g(x) + \frac{f(x)}{g(x)}g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' g(x) = f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

まとめ

1. 平均変化率, 微分係数, 接線の傾き
2. 導関数, 導関数の性質