微分・積分
第5回「微分(1)」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

1. 三角関数，指数関数，対数関数の微分
2. 合成関数の微分，対数微分

三角関数の微分(準備)

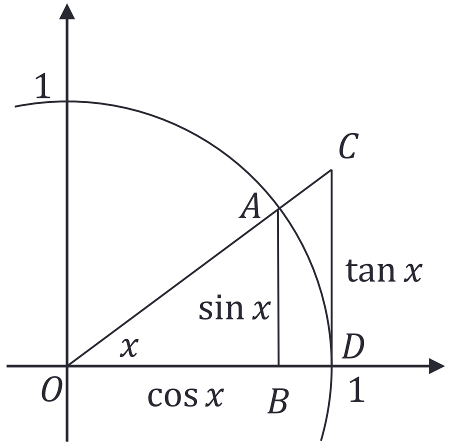
- 三角関数の微分を議論するために必要な準備を行う.

定理5.1

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

- $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において，扇形 AOD と三角形 AOB と三角形 COD の面積を比べると

$$\frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan x$$



- $\frac{1}{2}\sin x$ で割ると

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

三角関数の微分(準備)

- 逆数を取ると

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

であるから

$$\lim_{x\to 0}\cos x \le \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

- $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ であり $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$ であるから，挟み撃ちの定理により $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0$$

三角関数の微分

定理5.2

1. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

- 三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned}\sin(x+h) - \sin x &= \sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x \\ &= \cos x \cdot \sin h + \sin x \cdot (\cos h - 1)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} + \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) \\ &= \cos x \cdot 1 + \sin x \cdot 0 = \cos x\end{aligned}$$

三角関数の微分

- 三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned}\cos(x+h)-\cos x &= \cos x\cdot\cos h-\sin x\cdot\sin h-\cos x\\ &= \cos x\,(\cos h-1)-\sin x\cdot\sin h\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}\right)\\ &= \cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1=-\sin x\end{aligned}$$

- 商の微分の公式より

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

三角関数の微分(問題)

問題5.3

- 次の関数の導関数を求めよ.

1. $\sin^2 x$
2. $\sin^3 x$
3. $\sin x \cdot \cos x$
4. $\dfrac{\cos x}{x}$

ネイピア数

定義5.4

- ネイピア数 e を次の式で定義する.
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
- e の値は 2.718281828 … の無理数であることが知られている.

- 上の式で e が定義できるためには, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が収束することを示さなくてはならないが, 数列 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が単調増加で, $a_n<3$ であることから示すことができる.
- また, $e=\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ と定義しても同じになる.
- そのため, $e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ とも同値である.
- 二項定理を使って展開することで, $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ であることが分かる.

指数関数と対数関数(準備)

- 指数関数と対数関数の微分を議論するために必要な準備を行う.

定理5.5

1. $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$
2. $\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$

- まず,(2)を示す.

(対数関数の連続性)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\log(1+h)^{\frac{1}{h}}\overset{\downarrow}{=}\log\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)=\log e=1$$

- 次に,(1)を示す. $t=e^h-1$ とおくと, $h\to 0$ のとき $t\to 0$ である.
- また, $e^h=1+t$ より $h=\log(1+t)$ であるから,(2)より

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)}=1$$

指数関数の微分

- 指数関数 e^x は微分しても不変であるという特殊な性質を持つ.

定理5.6

$$(e^x)' = e^x$$

- 定理5.5(1)より

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

- 微分して不変な関数は e^x の定数倍しかないことも知られている.
- つまり, 微分方程式 $f'(x) = f(x)$ の解は $f(x) = C \cdot e^x$ の形(Cは定数)となる.
- 底が e でない場合は講義の後半で扱う.

対数関数の微分

定理5.7

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

- 定理5.5(2)より

$$\begin{aligned}(\log x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right) \qquad \left(t=\frac{h}{x}\text{とおく}\right)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{tx}\log(1+t) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\frac{\log(1+t)}{t}\\ &= \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

合成関数

定義5.8

- 関数 $g\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x)$ と $f\colon E \to \mathbb{R},\ y \mapsto f(y)$ で，像 $\operatorname{Img} g$ が E に含まれる場合，合成関数

$$f \circ g\colon D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f\big(g(x)\big)$$

を考えることができる．

- これは合成写像の特別な場合であるが，関数であることを強調して $f\big(g(x)\big)$ という記号を使うことが多い．

合成関数の微分

定理5.9

- $f(y)$, $g(x)$ が微分可能であれば，合成関数 $f\big(g(x)\big)$ も微分可能で

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

- $y = g(x)$, $z = f(y)$ とすれば

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

  と表現することも可能.

- 導関数は分数ではないが，形式的に約分できると思うと，右辺から左辺が得られる.

合成関数の微分の大雑把な証明

- 十分小さな h に関して $k = g(x+h) - g(x) \neq 0$ を仮定する.
- $g(x)$ の連続性より, $h \to 0$ で $k \to 0$ に注意すると

$$\left(f\big(g(x)\big)\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{f\big(g(x+h)\big) - f\big(g(x)\big)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\big(g(x+h)\big) - f\big(g(x)\big)}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x)+k) - f\big(g(x)\big)}{k} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

- 仮定が成立しない場合もあるので, 厳密な証明としては不十分.

合成関数の微分の証明(発展)

- 一般に，$f(x)$ が a で微分可能なとき，関数 $\delta(x)$ で $\lim_{x\to a}\delta(x)=0$ なるものが存在して
$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\delta(x)(x-a)$$
と書くことができる.
- a を $g(x)$, x を $g(x+h)$ に置き換えることで
$$f\big(g(x+h)\big)=f(g(x))+f'\big(g(x)\big)\big(g(x+h)-g(x)\big)$$
$$+\delta\big(g(x+h)\big)\big(g(x+h)-g(x)\big)$$
- これより
$$\frac{f\big(g(x+h)\big)-f\big(g(x)\big)}{h}=f'\big(g(x)\big)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$+\delta\big(g(x+h)\big)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
- $h\to 0$ としたとき，右辺の第1項は $f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$ に，第2項は 0 に収束する.

合成関数の微分（例）

例5.10

- $\left((5x^2+3)^9\right)'$ を計算することを考える.
- もちろん，展開してから微分しても良いが，計算が面倒である.
- 今，$f(y)=y^9$ と $g(x)=5x^2+3$ とすると，$f\left(g(x)\right)=(5x^2+3)^9$ となることから

$$
\begin{aligned}
\left((5x^2+3)^9\right)' &= (y^9)' \qquad (y=g(x)\text{ とおいた}) \\
&= 9y^8\cdot y' \\
&= 9(5x^2+3)^8\cdot 10x \\
&= 90x(5x^2+3)^8
\end{aligned}
$$

合成関数の微分（例）

例5.11

- $\left(e^{3x^2+7}\right)'$ を計算することを考える.
- $f(y)=e^y$ と $g(x)=3x^2+7$ とすると, $f\big(g(x)\big)=e^{3x^2+7}$ となることから

$$\begin{aligned}\left(e^{3x^2+7}\right)' &= (e^y)' \qquad (y=g(x)\text{ とおいた}) \\ &= e^y\cdot y' \\ &= e^{3x^2+7}\cdot 6x \\ &= 6xe^{3x^2+7}\end{aligned}$$

合成関数の微分（問題）

問題5.12

- 次の関数の導関数を求めよ.

1. $(x^2+x+1)^9$
2. $\sin^3 x$
3. $\cos x^2$
4. $(x^2+1)^2(2x^3-1)^4$

一般の指数関数の微分

定理5.13

- $a > 0$ に関して

$$(a^x)' = a^x \log a$$

- $a = e^{\log a}$ であるから

$$a^x = \left(e^{\log a}\right)^x = e^{x \log a}$$

と書くことができる.

- $f(y) = e^y$, $g(x) = x \log a$ とすると, $f\big(g(x)\big) = e^{x \log a} = a^x$ であるから

$$(a^x)' = (e^y)' \qquad (y = x \log a \text{ とおいた})$$

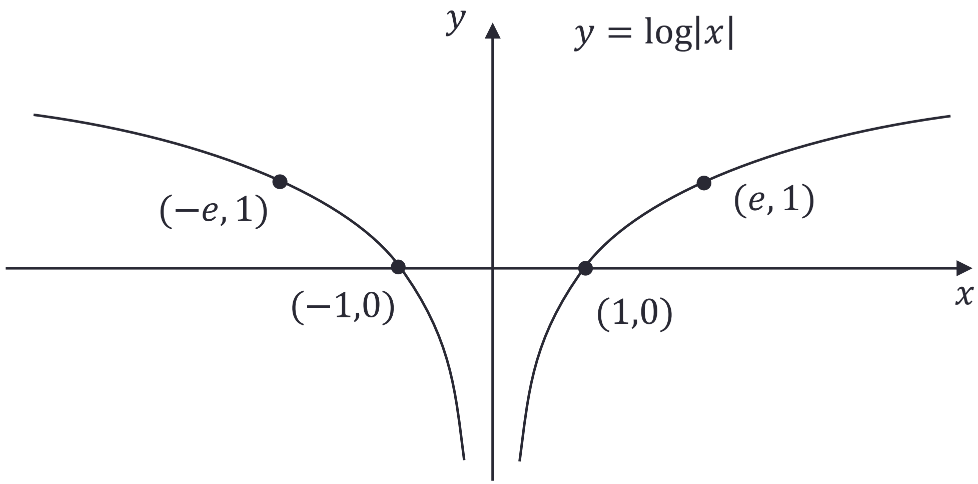
$$= e^y \cdot y'$$

$$= e^{x \log a} \cdot \log a$$

$$= a^x \log a$$

対数関数の微分の拡張

- $\log x$ の定義域は $x>0$ であるが，$\log|x|$ を考えることで，定義域を $x \neq 0$ なる実数全体に拡張することができる.



定理5.14

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

- $x>0$ の場合に成り立つのは定理5.7のままであり，$x<0$ の場合

$$(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

対数微分

定理5.15

- 微分可能な関数 $g(x)$ に対して

$$(\log|g(x)|)' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

- $f(y) = \log|y|$ とすると $f\big(g(x)\big) = \log|g(x)|$ と書くことができることから

$$(\log|g(x)|)' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

- 関数の対数を取ってから微分する方法は対数微分と呼ばれ，様々な場面に現れる.

対数微分（応用）

定理5.16

- $a \in \mathbb{R}$ に関して，$x > 0$ において
$$(x^a)' = a\,x^{a-1}$$

- $g(x) = x^a$ とすると
$$(\log|g(x)|)' = (\log x^a)' = (a \log x)' = \frac{a}{x}$$
- 定理5.15より
$$\frac{a}{x} = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{(x^a)'}{x^a}$$
であるから，$(x^a)' = a\,x^{a-1}$.
- 例えば
$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$$

まとめ

1. 三角関数，指数関数，対数関数の微分

2. 合成関数の微分，対数微分