微分・積分
第6回「微分(2)」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

1. 逆写像，逆関数，逆関数の微分
2. 逆三角関数，逆三角関数の微分

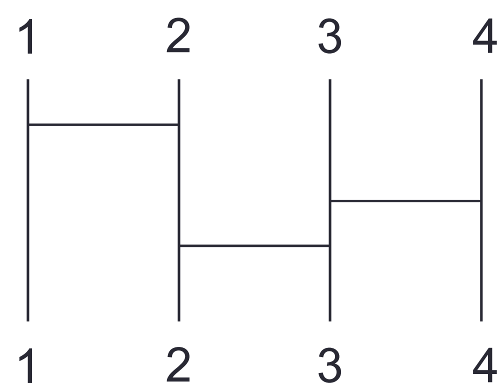
全射・単射

- 写像 $f: X \to Y$ に対して，$\mathrm{Im}\, f = \{ f(x) \mid x \in X\} \subset Y$ であった.

定義6.1

1. f が全射であるとは $\mathrm{Im}\, f = Y$ が成り立つ場合をいう. つまり「どの $y \in Y$ に対しても $x \in X$ が存在して $y = f(x)$」.
2. f が単射であるとは「$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$」が成り立つ場合をいう. 同値な対偶条件は「$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$」.
3. f が全単射であるとは，全射かつ単射である場合をいう.

- 例 : あみだくじは全単射



$1 \mapsto 3$

$2 \mapsto 1$

$3 \mapsto 4$

$4 \mapsto 2$

逆関数

定理6.2

- 写像 $f: X \to Y$ が全単射であれば，写像 $g: Y \to X$ が存在して

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

が成り立つ.

- この g を f の逆写像といい，f^{-1} と書く.

- 実際，任意の $y \in Y$ にたいして，$x \in X$ で $f(x) = y$ なるものが唯一つ存在するので，$g(y) = x$ と定義すればよい.

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$$

- 特に，$X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ のときに，逆写像を逆関数と呼ぶ.

逆関数(例)

例6.3

- 写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x - 4$ は全単射である.
- f の逆写像は $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \mapsto \frac{1}{2}y + 2$ で与えられる.
- 実際

$$
\begin{array}{ccccc}
x & \mapsto & 2x - 4 & \mapsto & \dfrac{1}{2}(2x - 4) + 2 = x \\
y & \mapsto & \dfrac{1}{2}y + 2 & \mapsto & 2\left(\dfrac{1}{2}y + 2\right) - 4 = y
\end{array}
$$

なので $g\big(f(x)\big) = x$ かつ $f\big(g(y)\big) = y$.

- $f(x) = 2x - 4$ の逆写像は，方程式 $y = 2x - 4$ を x に関して解くことで求まる.

逆関数(例)

例6.4

- 指数関数

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\quad x \mapsto e^x$$

と対数関数

$$g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\quad y \mapsto \log y$$

は互いに逆写像の関係にある.

$$g\bigl(f(x)\bigr) = \log(e^x) = x,\quad f\bigl(g(y)\bigr) = e^{\log y} = y$$

- 指数関数を $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ と考えると，これは全射でないことに注意する.
- 関数 $h(x)$ の値域を $\mathbb{R}_+$ に制限することで，全単射な関数 $f(x)$ が得られる.

逆関数(例)

例6.5

- 関数

$$f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto x^2$$
$$g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad y \mapsto \sqrt{y}$$

は互いに逆写像の関係にある.

$$g\big(f(x)\big) = \sqrt{x^2} = x, \quad f\big(g(y)\big) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$$

- 関数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ は単射ではないことに注意する.
- 関数 $h(x)$ の定義域を $\mathbb{R}_+$ に制限することで，全単射な関数 $f(x)$ が得られる.

逆関数の微分

定理6.6

- 微分可能な関数 $f(x)$ の逆関数 $g(y)$ が存在するとき, $g(y)$ も微分可能で

$$g'(y) = \frac{1}{f'\left(g(y)\right)}$$

- または

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

- ただし $f'(x) \neq 0$ $\left(\frac{dy}{dx} \neq 0\right)$ を仮定した.

- $f'\left(g(y)\right)$ は $f'(x)$ に $x = g(y)$ を代入して y の関数にするという意味である.

逆関数の微分（証明）

- $f(x)$ と $g(x)$ が互いに逆関数であるから $f\big(g(y)\big) = y$,
- 合成関数の微分の公式より $f'\big(g(y)\big) \cdot g'(y) = 1$.
- つまり，$g'(y) = \dfrac{1}{f'\big(g(y)\big)}$
- この証明では $g(y)$ の微分可能性が暗に仮定されているので，厳密には不十分である.

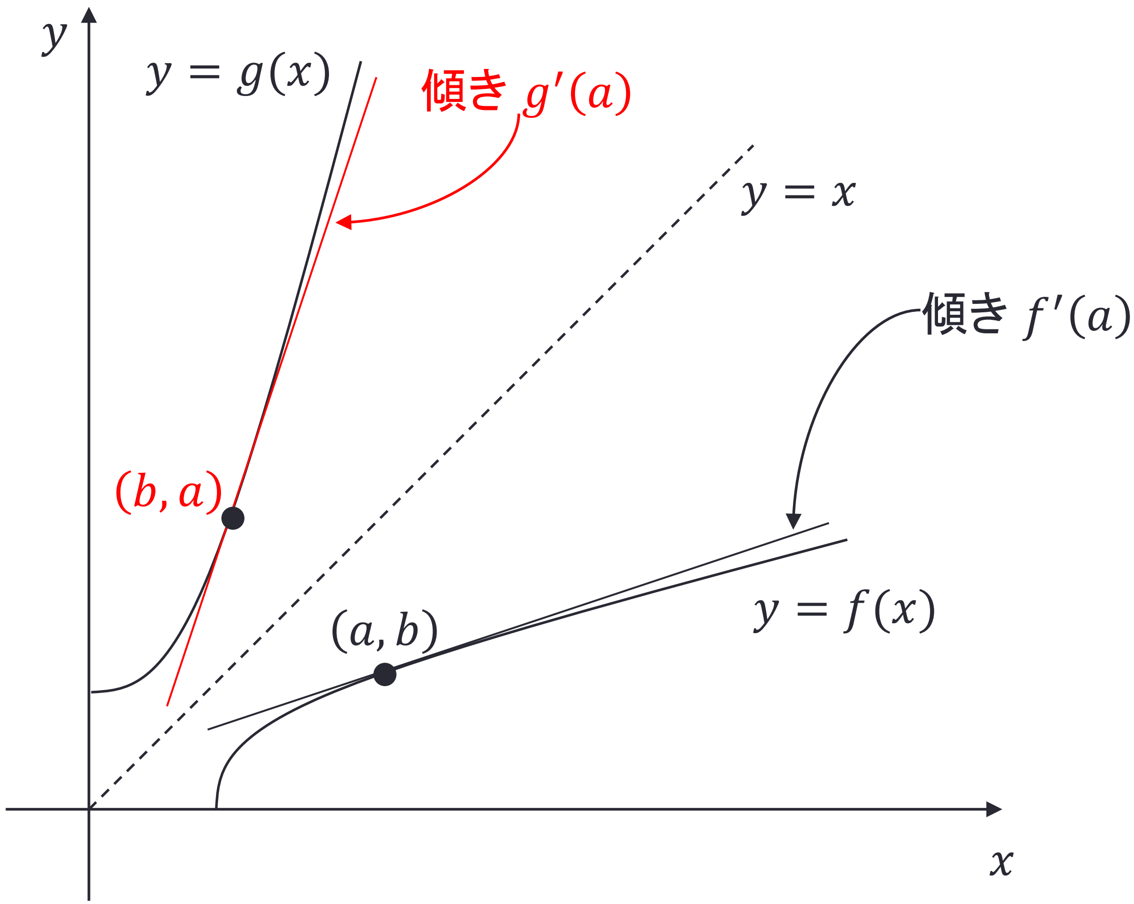
- $f(x)$ は微分可能なので連続であり，逆関数 $g(y)$ も連続になる（自明でないが正しい）.
- $y = f(x)$ とおくと $\tilde{y} \to y$ のとき $\tilde{x} = g(\tilde{y}) \to x$

$$g'(y) = \lim_{h \to 0} \frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \lim_{\tilde{y} \to y} \frac{g(\tilde{y}) - g(y)}{\tilde{y} - y} = \lim_{\tilde{x} \to x} \frac{\tilde{x} - x}{f(\tilde{x}) - f(x)}$$

$$= \lim_{\tilde{x} \to x} \frac{1}{\dfrac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

逆関数の微分

- 関数 $f(x)$, $g(x)$ が互いに逆関数であれば，それらのグラフは直線 $y = x$ に関して鏡映対称の関係にある.



逆関数の微分(例)

例6.7

- 関数

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x - 4 \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \frac{1}{2}y + 2$$

は互いに逆関数の関係にあった.

- 実際に導関数を計算してみると

$$f'(x) = 2 \qquad g'(y) = \frac{1}{2}$$

であるから，確かに

$$\frac{1}{g'(2x - 4)} = 2 = f'(x) \qquad \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}y + 2\right)} = \frac{1}{2} = g'(y)$$

逆関数の微分（例）

例6.8

- 関数

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto e^x \qquad g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, y \mapsto \log y$$

は互いに逆関数の関係にあった.

- 実際に導関数を計算してみると

$$f'(x) = e^x \qquad g'(y) = \frac{1}{y}$$

であるから，確かに

$$\frac{1}{g'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x = f'(x) \qquad \frac{1}{f'(\log y)} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y} = g'(y)$$

逆関数の微分(例)

例6.9

- 関数

$$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2 \qquad g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, y \mapsto \sqrt{y}$$

は互いに逆関数の関係にあった.

- 実際に導関数を計算してみると

$$f'(x) = 2x \qquad g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

であるから，確かに

$$\frac{1}{g'(x^2)} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x^2}}} = 2x = f'(x) \qquad \frac{1}{f'(\sqrt{y})} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = g'(y)$$

逆関数の微分(問題)

問題6.10

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ の逆関数を求め，逆関数の微分法が成立していることを確かめよ.

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ の逆関数は $g(y) = y^3$ である.
- 導関数はそれぞれ

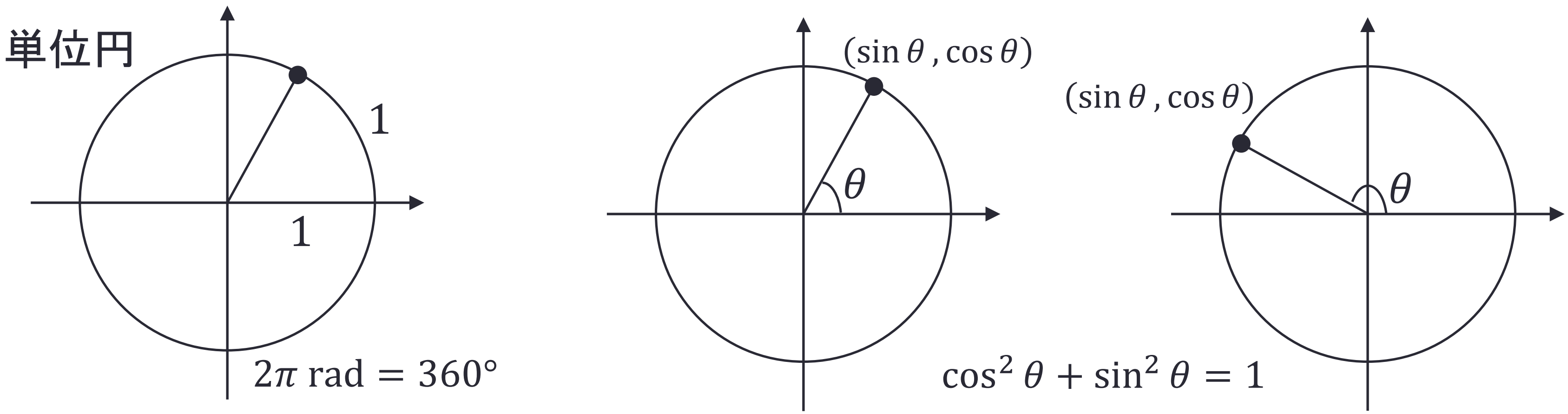
$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad g'(y) = 3y^2$$

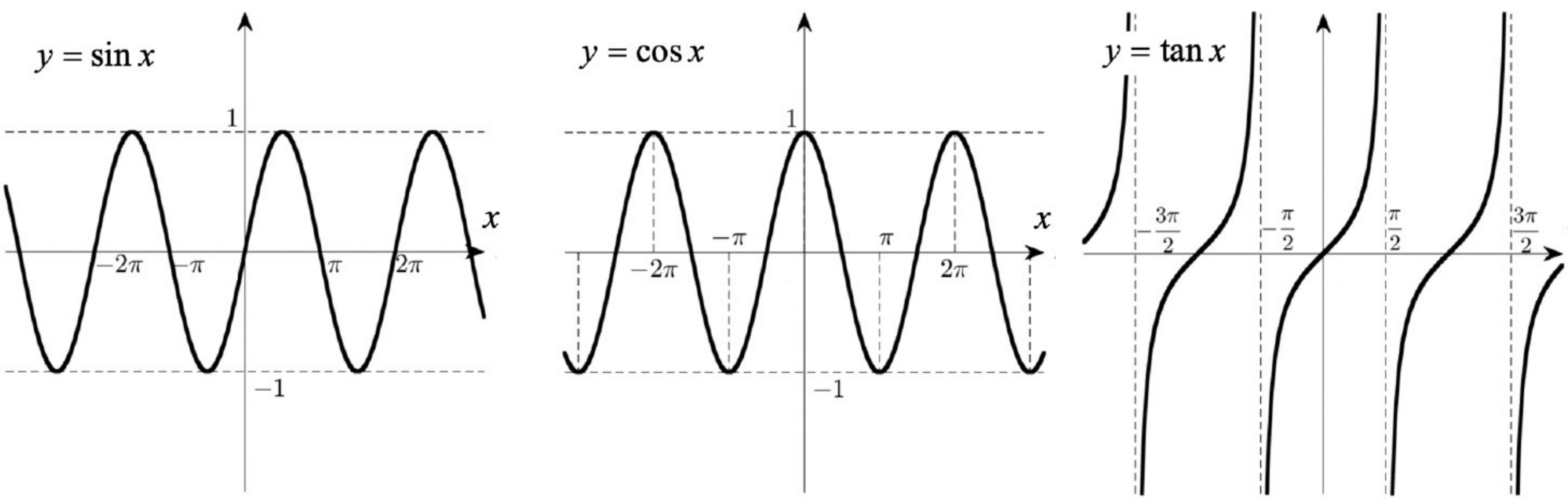
であるから，確かに

$$\frac{1}{g'\left(\sqrt[3]{x}\right)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = f'(x) \qquad \frac{1}{f'(y^3)} = \frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(y^3)^2}}} = g'(y)$$

三角関数

- 三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ を思い出す.





逆三角関数

定義6.11

- $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ は全単射．この逆関数を $\arcsin x$ と書く．

$$\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \quad x \mapsto \arcsin x$$

- $\cos\colon [0,\pi\,] \to [-1,1]$ は全単射．この逆関数を $\arccos x$ と書く．

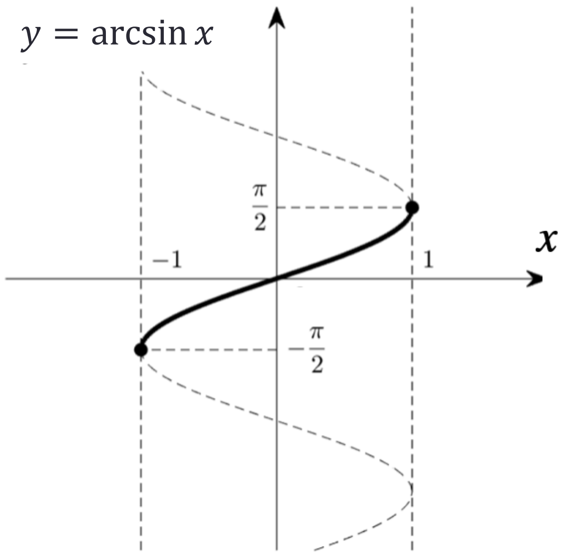
$$\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi\,], \quad x \mapsto \arccos x$$

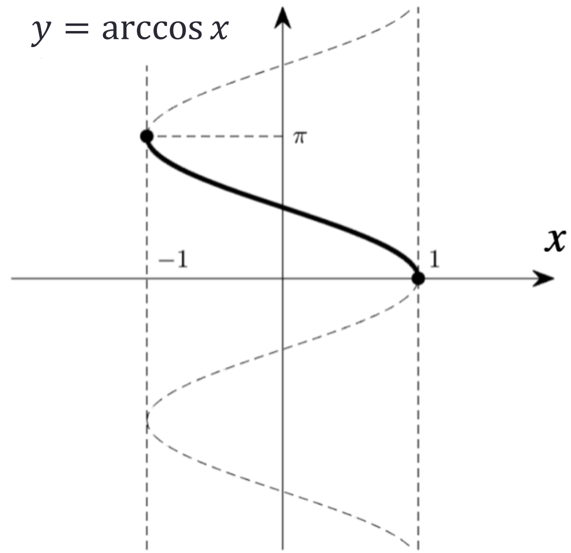
- $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ は全単射．この逆関数を $\arctan x$ と書く．

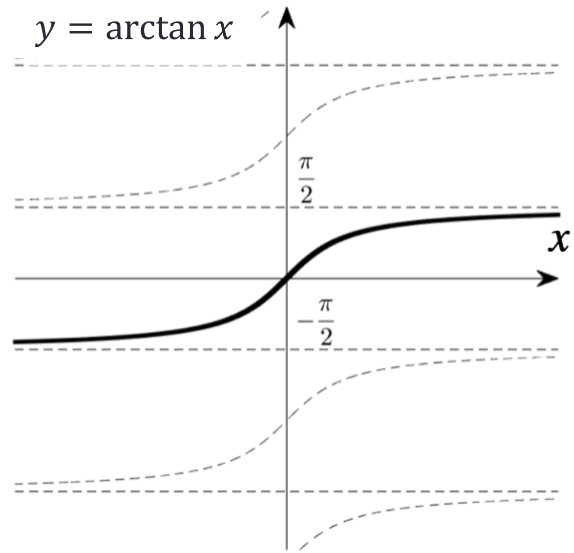
$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto \arctan x$$

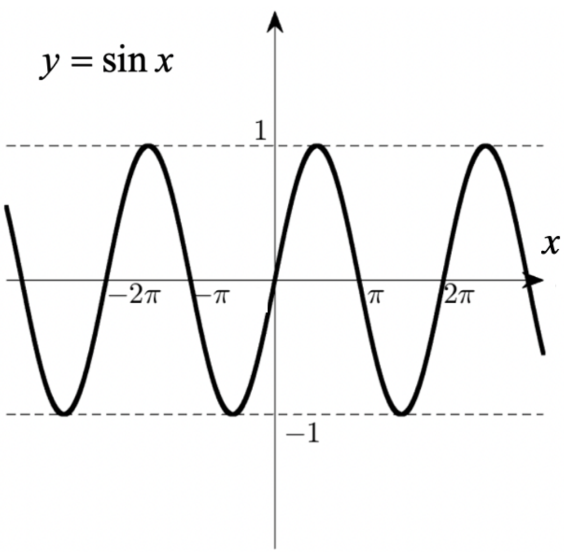
- これらは逆三角関数と呼ばれ，それぞれ $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ と書くこともある．（ $\arcsin x = \sin^{-1} x \neq \dfrac{1}{\sin x}$ ）

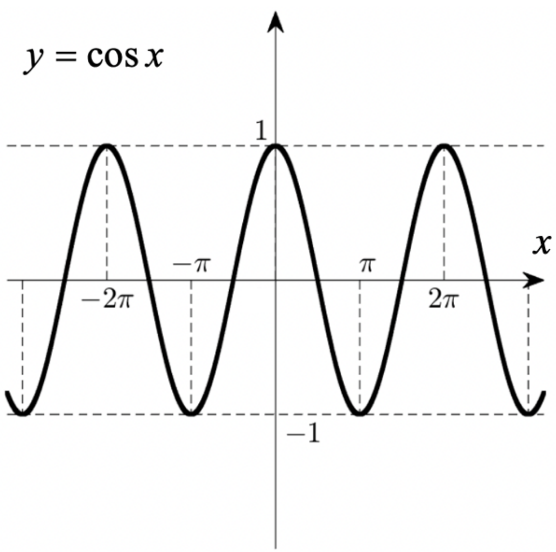
逆三角関数（グラフ）

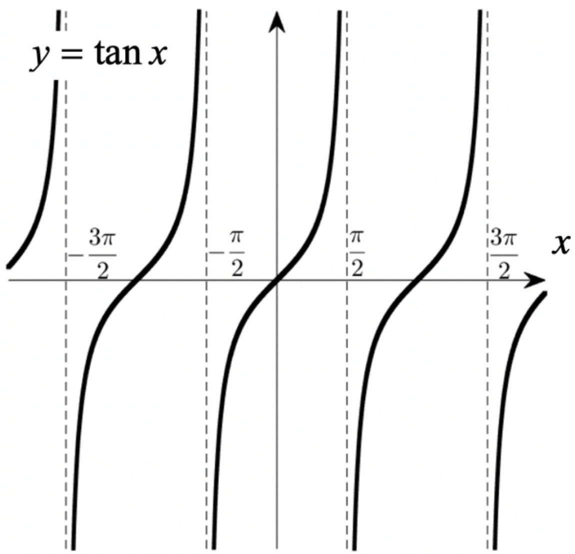

$y = \arcsin x$
x
$\frac{\pi}{2}$
-1
1
$-\frac{\pi}{2}$


$y = \arccos x$
π
x
-1
1


$y = \arctan x$
$\frac{\pi}{2}$
x
$-\frac{\pi}{2}$

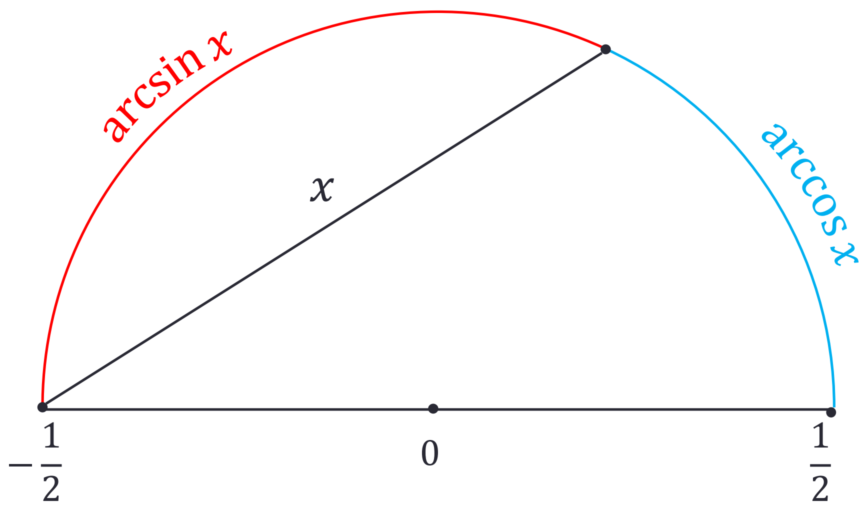

$y = \sin x$
1
x
-2π
$-\pi$
π
2π
-1


$y = \cos x$
1
x
$-\pi$
π
-2π
2π
-1


$y = \tan x$
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
x

逆三角関数

- 実際，$0 \leq x \leq 1$ に関して，逆三角関数 $\arcsin x$ と $\arccos x$ は半径 $\frac{1}{2}$ の円の孤（arc）の一部の長さを表している.



- これにより，例えば

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

が視覚的に理解できる.（$-1 \leq x \leq 1$ で成立）

逆三角関数(問題)

問題6.12

- 次の値を求めよ.

1. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\arcsin 1$
3. $\arccos \frac{1}{2}$
4. $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$

逆三角関数の微分

定理6.13

1. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

1. $f(x) = \arcsin x$ の逆関数は $g(y) = \sin y$ なので
$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
2. $f(x) = \arccos x$ の逆関数は $g(y) = \cos y$ なので
$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
3. $f(x) = \arctan x$ の逆関数は $g(y) = \tan y$ なので
$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y \cdot (1+\tan^2 y)}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

逆三角関数の微分(問題)

問題6.14

- 次の関数の導関数を求めよ.

1. $\arcsin 3x^2$
2. $\arctan(x^3+1)$

まとめ

1. 逆写像, 逆関数, 逆関数の微分
2. 逆三角関数, 逆三角関数の微分