

# 線形代数

## 第3回「線形写像」

---

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

# 今日の内容

- 行列を数ベクトル空間の間の線形写像とみなし、幾何学的に理解する.
- 写像
  - 定義域
  - 値域
  - 単射
  - 全射
  - 合成
  - 逆写像
- 線形写像
  - 拡大縮小
  - 鏡像反転
  - 射影
- ポイント:
  - 行列は線形写像を定義する(ベクトルを別のベクトルに変換する).

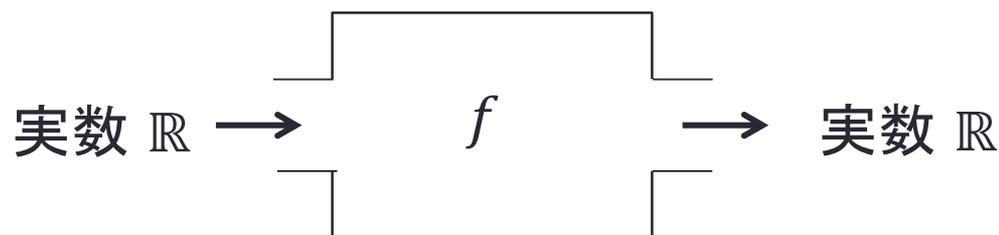
# 関数

- **写像**とは関数の一般化である.
- 例えば, 関数  $f(x) = (1 + x)^2$  は実数  $a \in \mathbb{R}$  に対して実数  $(1 + a)^2 \in \mathbb{R}$  を返す「対応」だと考えられる.

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(0.3) = 1.69, \quad f(10) = 121$$

といった具合である.

- つまり  $f$  は実数を入力すると実数を出力する機械だと考えられる.

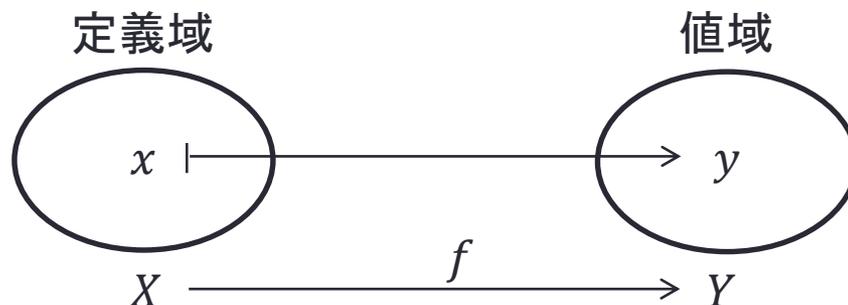


- 関数は「対応そのもの」であるという観点に立てば, 入力や出力は実数だけでなく, もっと広く考えることが可能である.

# 写像

## 定義3.1

- 集合  $X$  の各元に対して, 集合  $Y$  の元を唯一つ定める対応のことを **写像** と呼び,  $f: X \rightarrow Y$  と表す.
- $X$  のことを **定義域**,  $Y$  のことを **値域** という.



## 定義3.2

- 写像  $f: X \rightarrow Y$  によって  $x \in X$  が  $y \in Y$  に対応するとき,  $y$  を  $f$  による  $x$  の **像** といい,  $y = f(x)$  と書く.
- この対応を次のように書くこともある.

$$\begin{array}{ccc}
 f: X & \rightarrow & Y \\
 \cup & & \cup \\
 x & \mapsto & y = f(x)
 \end{array}$$

# 写像

## 例3.3

- 人間  $A$  に対して,  $A$  の年齢を対応させることで写像

$$f: \{ \text{人間} \} \rightarrow \mathbb{Z} \quad A \mapsto A \text{の年齢}$$

が得られる.

- 同様に, 写像

$$g: \{ \text{犬} \} \rightarrow \mathbb{R} \quad A \mapsto A \text{の身長}$$

なども考えられる.

- 他にも, 猫にその母猫を対応させることで

$$h: \{ \text{猫} \} \rightarrow \{ \text{猫} \} \quad A \mapsto A \text{の母親}$$

が得られる.

- 一方で, 人間  $A$  と  $A$  の友人の対応は写像ではない.  $A$  の友人が1人とは限らないからである.

# 写像

## 例3.4

- 日本の大学に対して、学生数を対応させることで写像

$$f: \{ \text{日本の大学} \} \rightarrow \mathbb{N} \quad A \text{大学} \mapsto A \text{の学生数}$$

が得られる.

- 同様に、所在都道府県を対応させることで別の写像

$$g: \{ \text{日本の大学} \} \rightarrow \{ \text{都道府県} \} \quad A \text{大学} \mapsto A \text{大学の所在地}$$

が得られる.

- 注意: 論理学や計算機科学では写像を関数と言うこともあるので注意が必要.

# 像

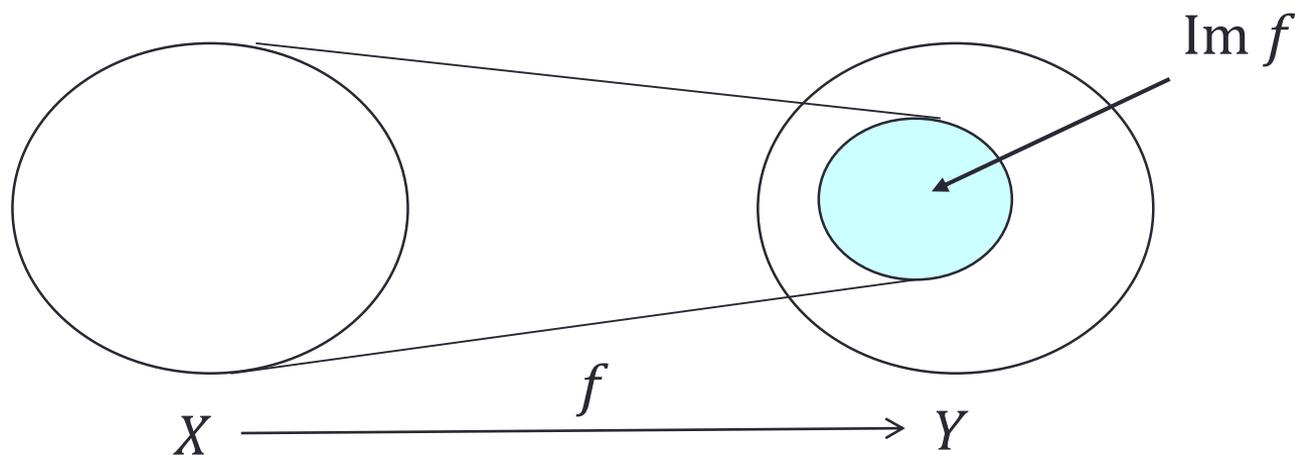
## 定義3.5

- 写像  $f: X \rightarrow Y$  の像を

$$\text{Im } f = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

で定義する.

- つまり,  $x$  が  $X$  のすべての元を動くとき,  $x$  の像  $f(x)$  全体のなす  $Y$  の部分集合のことである.



# 全射, 単射

## 定義3.6

- $f: X \rightarrow Y$  を写像とする.
- $f$  が**全射**であるとは,  $\text{Im } f = Y$  が成立すること.
  - つまり, 「どの  $y \in Y$  に対しても  $x \in X$  が存在して  $y = f(x)$ 」が成立すること.
- $f$  が**単射**であるとは, 「 $x_1 \neq x_2$  ならば  $f(x_1) \neq f(x_2)$ 」が成立すること.
  - 同値な対偶条件は, 「 $f(x_1) = f(x_2)$  ならば  $x_1 = x_2$ 」である.
- $f$  が**全単射**であるとは, 全射かつ単射であること.

# 全射, 単射, 全単射

## 例3.7

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2(x - 1)$  は全射だが単射ではない.
  - $f(0) = f(1)$
- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$  は単射だが全射ではない.
  - $\text{Im } g = \mathbb{R}_{>0}$
- $h_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  は全射でも単射でもない.
- $h_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$  は全単射である.

# 全射, 単射, 恒等写像

## 例3.8

- 次の写像を考える.

$$f: \{ \text{日本の大学} \} \rightarrow \mathbb{N} \quad A \text{大学} \mapsto A \text{の学生数}$$

写像  $f$  は全射ではない(単射であろうか?).

- 次の写像を考える.

$$g: \{ \text{日本の大学} \} \rightarrow \{ \text{都道府県} \} \quad A \text{大学} \mapsto A \text{大学の所在地}$$

写像  $g$  は全射だが, 単射ではない.

## 定義3.9

- 何もしない写像  $\text{id}: X \rightarrow X, x \mapsto x$  を**恒等写像**という.
- 恒等写像は全単射である.

# 合成写像

## 定義3.10

- 写像  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  に対して, 合成写像  $g \circ f: X \rightarrow Z$  が

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

で定義される.

- つまり,  $x \in X$  に対して  $f(x) \in Y$  が定まり, さらに  $f(x) \in Y$  に対して  $g(f(x)) \in Z$  が定まる.
- 図示すれば次のようになる.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & g \circ f \end{array}$$

- 写像  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  の合成写像の記号「 $g \circ f$ 」において  $f, g$  の順序に注意する. これは合成写像が  $g(f(x))$  で定義されることから理解できる.

# 逆写像

## 定理3.11

- 写像  $f: X \rightarrow Y$  が全単射であれば、写像  $g: Y \rightarrow X$  が存際して

$$g \circ f = \text{id}, \quad f \circ g = \text{id}$$

が成立する.

- この  $g$  を  $f$  の逆写像といい、 $f^{-1}$  と書く.

- 全単射であれば、任意の  $y \in Y$  に対して、 $x \in X$  で  $f(x) = y$  なるものが唯一存在するので、 $g(y) = x$  と定義すればよい.

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} Y$$

- これを  $f^{-1}(y) = x$  と書くということである.

# 逆写像

## 例3.12

- 写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 2x - 4$  は全単射である.
- 実際,  $f$  の逆写像は,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto \frac{1}{2}y + 2$  で与えられる.

$$\begin{array}{ccc} f(x) & & g \circ f(x) \\ x \mapsto 2x - 4 & \mapsto & \frac{1}{2}(2x - 4) + 2 = x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} g(y) & & f \circ g(y) \\ y \mapsto \frac{1}{2}y + 2 & \mapsto & 2\left(\frac{1}{2}y + 2\right) - 4 = y \end{array}$$

# 線形写像

- 行列は積によってベクトルを別のベクトルに変換する.
- 例えば

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

## 定義3.13

- $m \times n$  行列  $A$  が与えられたとき, 写像  $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  が行列の積で定義される.

$$f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad v \mapsto Av$$

$f_A$  を  $A$  が定める**線形写像**(線形変換, 一次変換)という.

# 線形写像

例3.14

- 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

は写像  $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を定める.

$$f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x + 4y \end{bmatrix}$$

例えば

$$f_A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

# 線形写像

例3.15

• 行列

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

は写像  $f_B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を定める.

$$f_B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3z \\ 5x + y + 4z \end{bmatrix}$$

例えば

$$f_B \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

# 標準基底

## 定義3.16

- $n$  次元数ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  には  $n$  個の自然なベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

が存在する.

- これらは**標準基底**と呼ばれる.

- 例えば  $\mathbb{R}^2$  では

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbb{R}^3$  では

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 行列の列ベクトル

## 定理3.17

- $m \times n$  行列  $A$  の列ベクトルを  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  とする.
- これを  $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$  と書いたりする.
- $A$  が定める写像

$$f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$$

に関して

$$f_A(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \quad \dots, \quad f_A(\mathbf{e}_n) = \mathbf{a}_n$$

が成立する.

- つまり  $\mathbf{e}_j$  の行き先は  $A$  の第  $j$  列ベクトルである.

# 行列の列ベクトル

## 例3.18

- 行列  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  を考える.
- 先ほどの記法では

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- 実際

$$f_A(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_A(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

# 行列の列ベクトル

## 例3.19

- 行列  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$  を考えると

$$f_B(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$f_B(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f_B(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

# 線形写像

## 例3.20

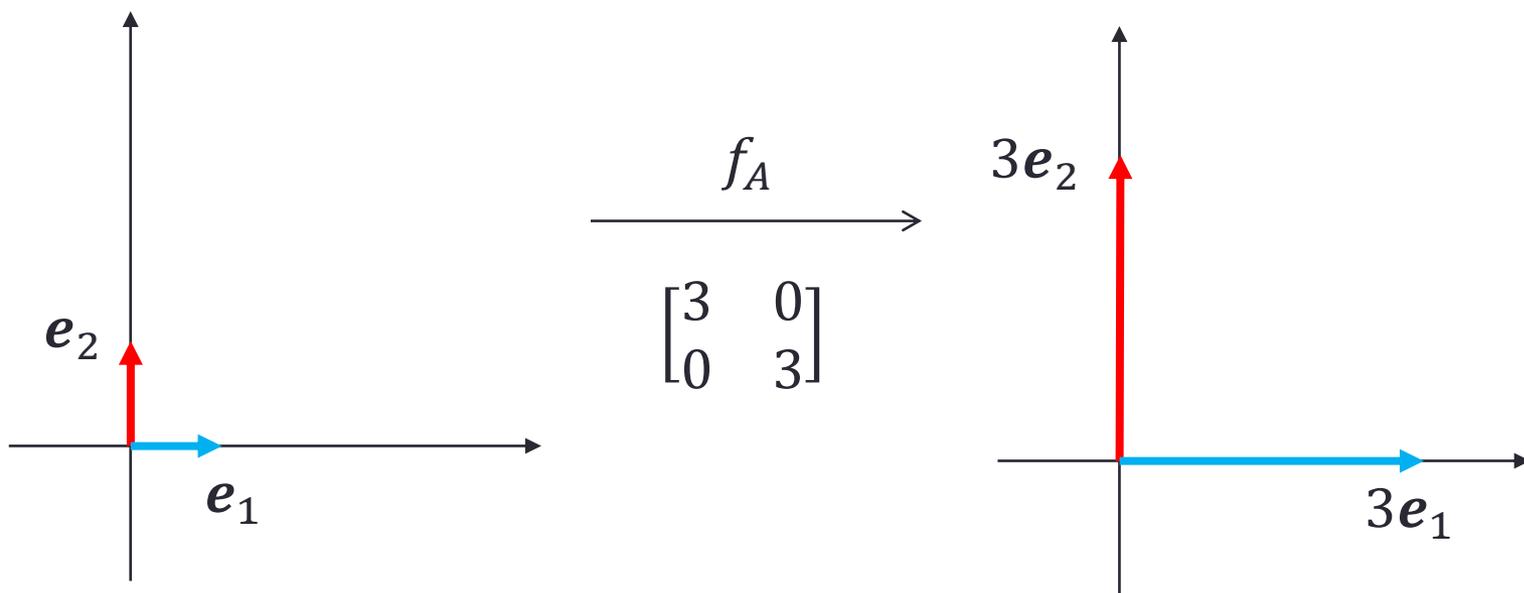
- 次の行列は  $\mathbb{R}^2$  のどのような線形写像を定めるか？

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

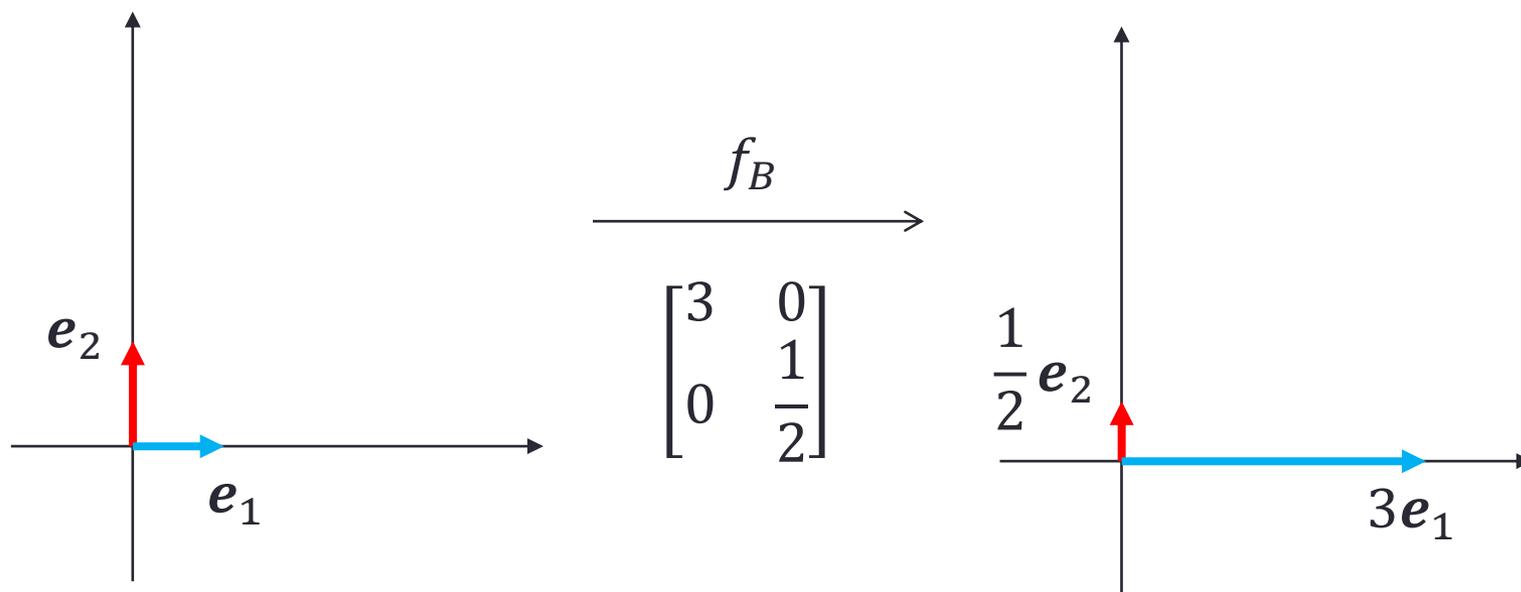
- 標準基底  $e_1, e_2$  の行先を調べると、線形写像は理解しやすい。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$



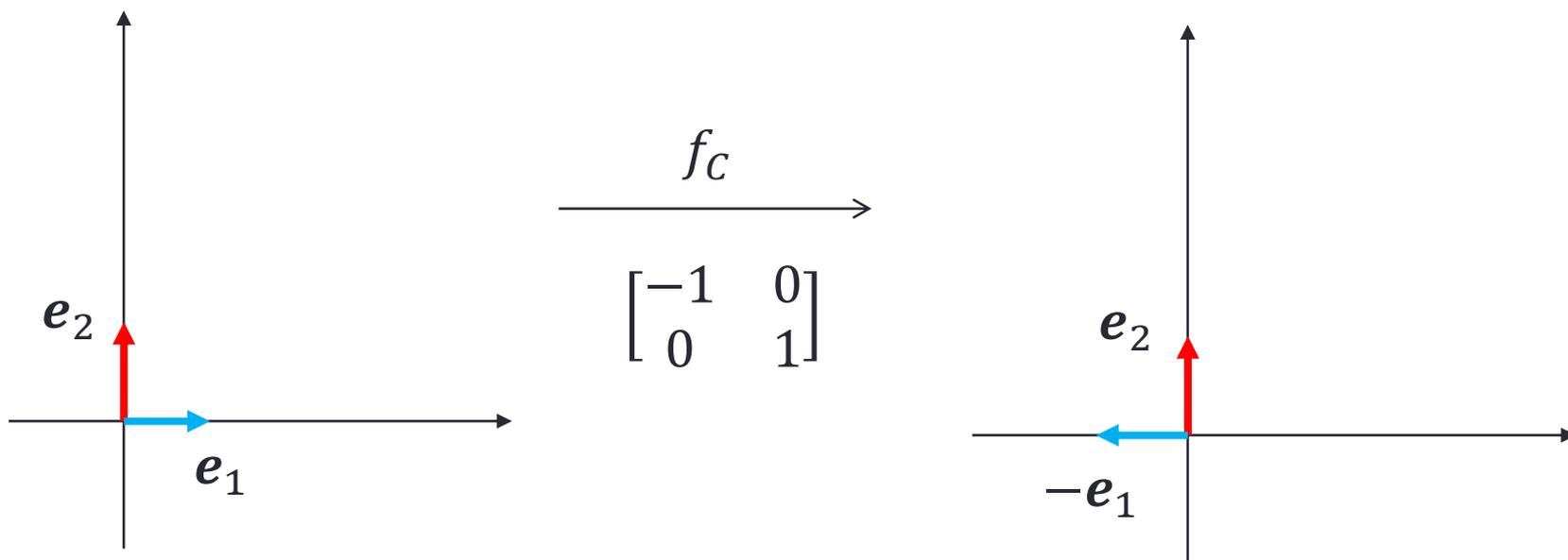
- 3倍拡大

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad f_B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$



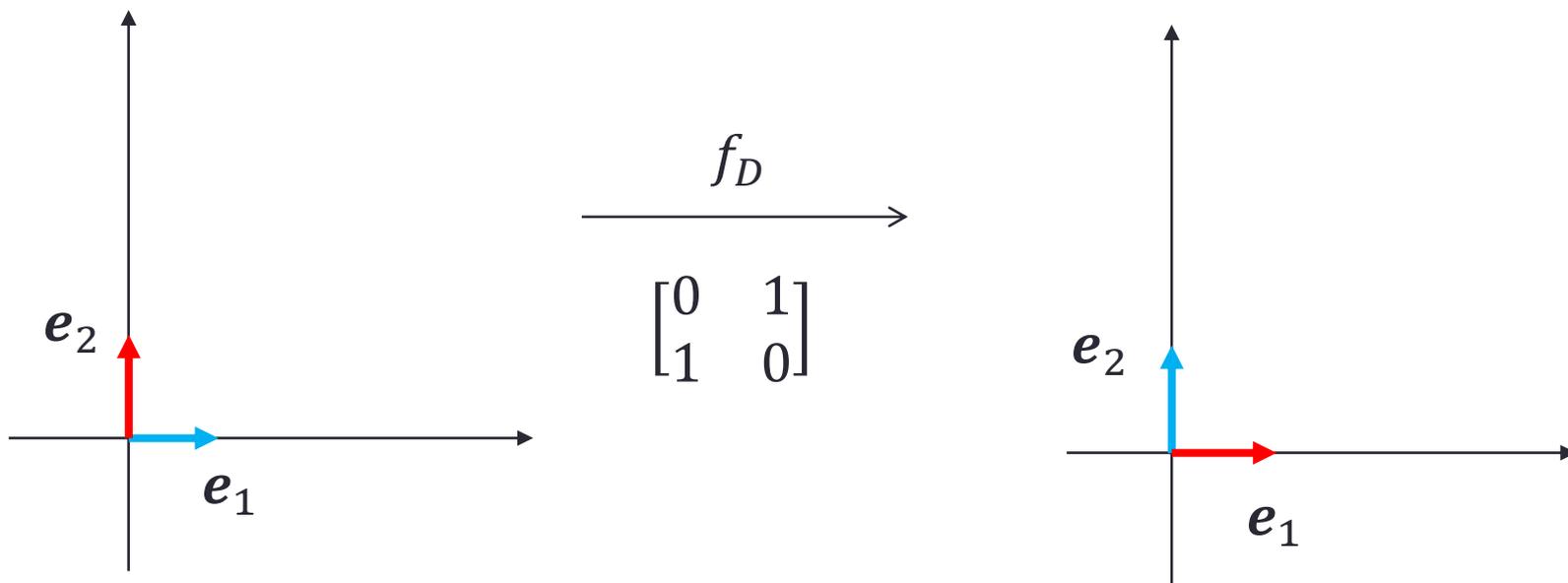
- 拡大縮小

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f_C: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$



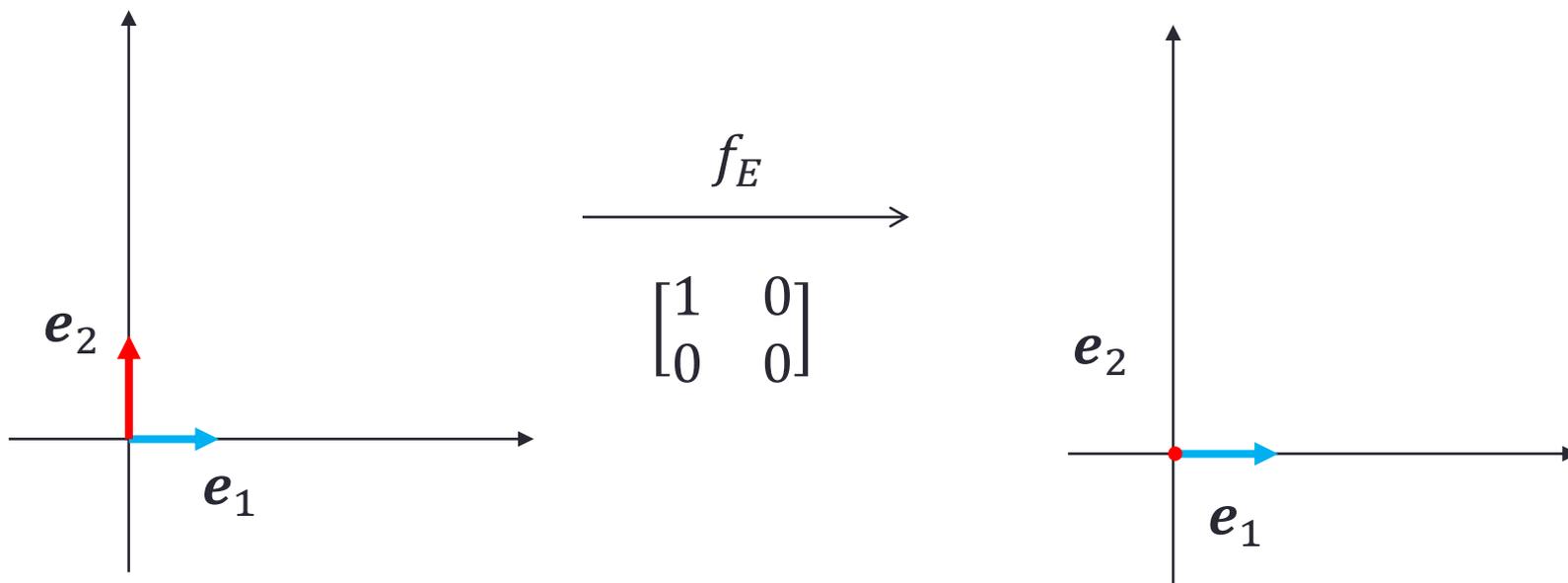
- $y$  軸に関する鏡像反転

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_D: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$



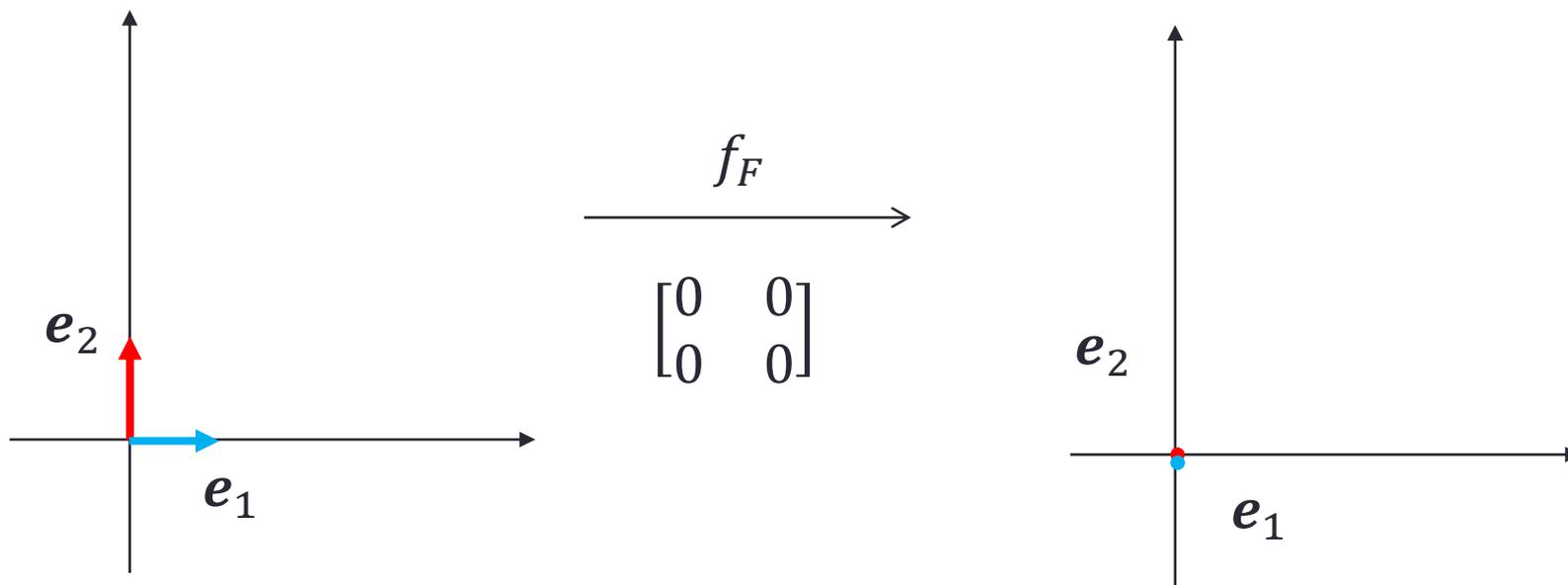
- $(y = x)$  軸に関する鏡像反転

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$



- $x$  軸への射影

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$



- 原点への射影(零写像)

# まとめ

- 写像
  - 定義域
  - 値域
  - 単射
  - 全射
  - 合成
  - 逆写像
- 線形写像
  - 拡大縮小
  - 鏡像反転
  - 射影
- ポイント
  - 行列  $A$  の幾何学的見方
  - ベクトル  $v$  を別のベクトル  $Av$  に変換する線形写像