線形代数
第7回「行列式（1）」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

- 与えられた行列が正則であるか否かを判断する指標として行列式がある.
- 行列式の定義に必要な置換について説明する.

1. 行列式(2,3次の場合，サラスの方法)

2. 置換(合成，逆置換，巡回置換，互換，符号)

連立一次方程式

- n 変数の n 個の方程式からなる連立一次方程式は n 次正方行列 A と n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$, n 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ を用いて

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

  の形に書くことができる.（A は係数行列, x は変数ベクトル, b は定数項ベクトル）
- 連立一次方程式 $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解が一意的に存在するための必要十分条件は, A が正則行列であることである.
- このとき, 解は

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\,\boldsymbol{b}$$

- A が正則行列であるための必要十分条件は, $\mathrm{rank}\,A = n$ である.
- より簡明な判定方法はあるのか?

連立一次方程式

- 2 変数 x, y に関する連立一次方程式
$$\begin{cases} a\,x + b\,y = u \\ c\,x + d\,y = v \end{cases}$$
を考える.
- 第1式を d 倍し，第2式を b 倍することで，
$$\begin{cases} ad\,x + bd\,y = du \\ bc\,x + bd\,y = bv \end{cases}$$
- 2式の差を取ることで
$$(ad - bc)x = du - bv$$
- $ad - bc \neq 0$ であれば，解が一意的に定まる.
$$x = \frac{du - bv}{ad - bc} \qquad y = \frac{ad - cu}{ad - bc}$$
- $ad - bc$ は係数行列の重要な量だと考えられる.

行列式

定義7.1

- 2次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ の行列式を

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

で定義する.

- 行列式の意味は「符号付体積拡大率」であるが，これに関しては次回解説する.

行列式(例)

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ に関して

$$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- 行列 $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ に関して

$$|B| = \cos\theta \cdot \cos\theta - (-\sin\theta) \cdot \sin\theta = 1$$

行列式

定義7.2

- 3次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ の行列式を

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

で定義する.

サラスの方法

定理7.3

- 2次と3次の正方行列については，左上から右下へ向かい方向に + の符号をつけて積を取り，右上から左下へ向かう方向に − の符号をつけて積を取り，それらの和を取ることで行列式が求められる.
- これを**サラスの方法**という.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

- より一般に，高次の正方行列 A に対しても行列式 $|A|$ が定義されるが，サラスの方法のような表示は知られていない.

行列式（記法）

- 文献によっては，正方行列 A の行列式を

$$\det A \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

  などと書く場合がある.

- この講義でも，後者の記法はしばしば登場する.

行列式（問題）

問題7.3

- 次の行列の行列式を計算せよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

置換

- 一般の正方行列 A の行列式 $|A|$ を定義するために，置換の概念を導入する.
- n 個の文字からなる集合 $L=\{1,2,\cdots,n\}$ を考える.

定義7.4

- L から自分自身への全単射の写像を n 文字の置換という.
- n 文字の置換 $\sigma: L \to L$ が

$$1 \mapsto k_1,\ \ 2 \mapsto k_2,\ \ \cdots,\ \ n \mapsto k_n$$

という写像のときに

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

と表す.

- つまり，下の数字は上の数字の行先を示す.

置換(例)

例7.5

- 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ に関して

$$\sigma(1) = 3,\ \ \sigma(2) = 1,\ \ \sigma(3) = 4,\ \ \sigma(4) = 2$$

- この表記は，上下の組み合わせが変わらない限り順序は変えて良い．
- また，動かさない文字は省略しても良い．

例7.6

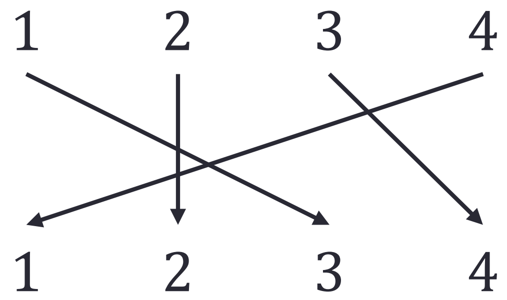
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

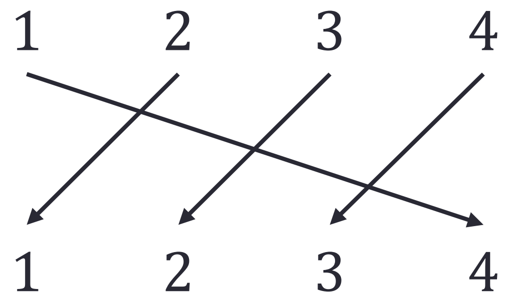
- 省略する場合には，何文字の置換なのか明らかにする必要がある．

置換（図示）

- 置換は図示すると理解しやすい.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$





置換の積

- 置換は L から自分自身への写像であるので，写像の合成を考えることができる.

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\tau"] \arrow[rr, bend right, "\sigma \circ \tau"'] & L \arrow[r, "\sigma"] & L
\end{tikzcd}
$$

定義7.7

- 置換 σ と τ の**積** $\sigma\,\tau$ を $\sigma \circ \tau$ で定義する.

$$\sigma\,\tau(i) = \sigma\big(\tau(i)\big) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

置換の積(例)

例7.8

- 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ と $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ の積を求める.

$$\sigma\,\tau(1) = \sigma\,(2) = 3$$
$$\sigma\,\tau(2) = \sigma\,(3) = 1$$
$$\sigma\,\tau(3) = \sigma\,(4) = 2$$
$$\sigma\,\tau(4) = \sigma\,(1) = 4$$

であるから

$$\sigma\,\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

単位置換と逆置換

定義7.9

- すべての文字を動かさない置換を e と書き，単位置換という.
- 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

を σ の逆置換という.

- このとき

$$\sigma\,\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\,\sigma = e$$

が成り立つ.

逆置換(例)

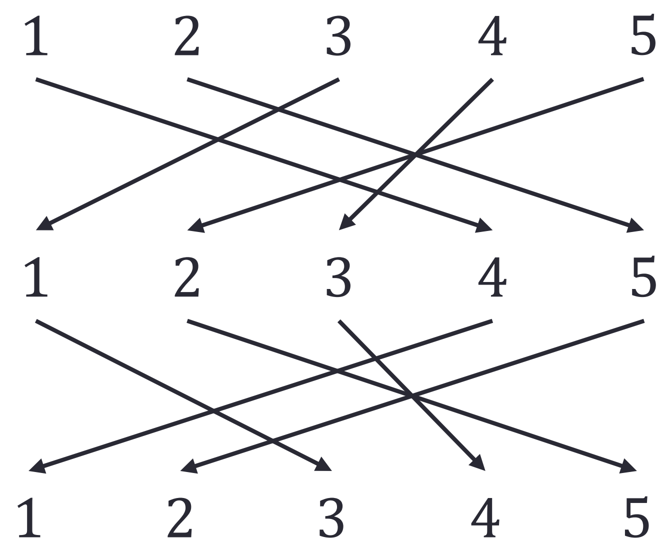
例7.10

- 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ の逆置換は

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



巡回置換

定義7.11

- 集合 $L=\{1,2,\cdots,n\}$ のうち $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 以外は動かさないで, $k_1,k_2,\cdots,k_r$ のみを

$$k_1\mapsto k_2,\ \ k_2\mapsto k_3,\ \ \cdots,\ \ k_r\mapsto k_1$$

と順にずらす置換

$$\sigma=\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_1 \end{pmatrix}$$

を**循環置換**といい

$$\sigma=(k_1\ k_2\ \cdots k_r)$$

と書く.

巡回置換(例)

例7.12

- 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ は

$$\sigma: 2 \mapsto 5,\ \ 5 \mapsto 3,\ \ 3 \mapsto 2$$

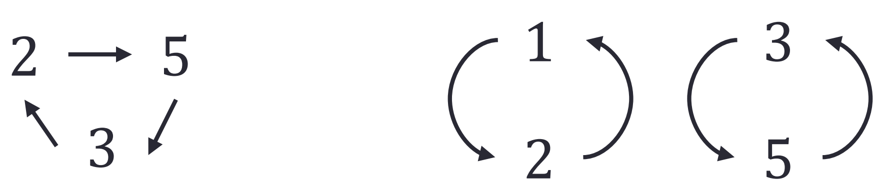
であって，他の文字は動かさないので

$$\sigma = (2\ 5\ 3)$$

- この巡回置換 σ は次のように書くこともできる.

$$\sigma = (5\ 3\ 2) = (3\ 2\ 5)$$

- 一方で，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ は巡回置換ではない.



循環置換の積

定理7.13
- 任意の置換は循環置換の積で表される.

- 例えば $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ について考える.
- まず何か1つの文字，例えば 1 を取り，それがどう移っているかを調べる.

$$1 \mapsto 4,\ \ 4 \mapsto 2,\ \ 2 \mapsto 1$$

- したがって，σ と巡回置換 $(1\ 4\ 2)$ は，$1, 2, 4$ に関して同じ変換を引き起こす.
- 次に，$1, 2, 4$ 以外の文字，例えば 3 を取り，それがどう移っていくかを調べる.

$$3 \mapsto 6,\ \ 6 \mapsto 5,\ \ 5 \mapsto 7,\ \ 7 \mapsto 3$$

- したがって，σ と巡回置換 $(3\ 6\ 5\ 7)$ は，$3, 5, 6, 7$ に関して同じ変換を引き起こす.
- σ が動かす文字に関しては全て調べたから，

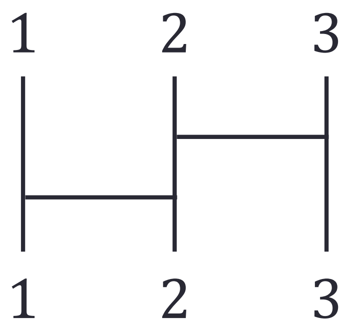
$$\sigma = (1\ 4\ 2)(3\ 6\ 5\ 7) = (3\ 6\ 5\ 7)(1\ 4\ 2)$$

互換

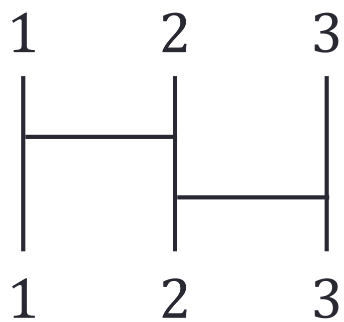
定義7.14

- 巡回置換の内，特に2文字の巡回置換 $(i\ j)$ を互換という.
- つまり，互換とは2文字 i と j を入れ替え他の文字は動かさない置換のことである.

- あみだくじは互換の積の良い例になっている.



$(1\ 2)(2\ 3)$



$(2\ 3)(1\ 2)$

- 上のあみだくじでは $(1\ 3)$ は現れない.
- また $(1\ 2)(2\ 3) \neq (2\ 3)(1\ 2)$ であることにも注意.

互換の積

定理7.15

- 任意の置換は互換の積で表される.

- 定理7.13より，任意の置換は循環置換の積で表される.
- 循環置換は次のように互換の積で表すことができる.

$$(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r) = (k_1\ k_r)\cdots(k_1\ k_3)(k_1\ k_2)$$

- したがって，任意の置換は互換の積で表すことできる.

- 例えば,

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$$

$$(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$$

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$$

互換の積

例7.16

- $(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$ が成り立っていることを確認する.

$$(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(1) = (1\ 4)(1\ 3)(2) = (1\ 4)(2) = 2$$

$$(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(2) = (1\ 4)(1\ 3)(1) = (1\ 4)(3) = 3$$

$$(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(3) = (1\ 4)(1\ 3)(3) = (1\ 4)(1) = 4$$

$$(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(4) = (1\ 4)(1\ 3)(4) = (1\ 4)(4) = 1$$

偶置換と奇置換

定義7.17

- 置換 σ が m 個の互換の積で表せるとき

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$

を σ の**符号**という.

- $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ となる置換 σ を**偶置換**という.
- $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ となる置換 σ を**奇置換**という.

- 置換 σ の互換の積としての表示は一意的ではない.

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3\ 4) &= (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2) \\ &= (1\ 3)(1\ 4)(3\ 4)(2\ 3)(1\ 3)\end{aligned}$$

- しかし, 置換の符号は互換の積としての表示に依存しない.
- 単位置換 e に関しては, $\mathrm{sgn}(e) = \mathrm{sgn}\big((1\ 2)(2\ 1)\big) = 1$

符号

定理7.18

- $\mathrm{sgn}(\sigma\,\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$
- $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$

- 置換 σ が k 個の互換の積，置換 τ が l 個の互換の積で表される場合，$\sigma\,\tau$ は $k+l$ 個の互換の積で表すことができるため

$$\mathrm{sgn}(\sigma\,\tau) = (-1)^{k+l} = (-1)^k(-1)^l = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$$

が成り立つ.

- これを，$\sigma\,\sigma^{-1} = e$ に適用すると，

$$\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma\,\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(e) = 1$$

- $\mathrm{sgn}(\sigma) = \pm 1$ であることから

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

符号(例)

例7.19

- 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ の符号を求めよう.
- まず，巡回置換の積に分解する.

$$1 \mapsto 7 \mapsto 9 \mapsto 5 \mapsto 1,\ \ 2 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 2,\ \ 3 \mapsto 8 \mapsto 3$$

であるから

$$\sigma = (1\ 7\ 9\ 5)(2\ 6\ 4)(3\ 8)$$

- 各巡回置換を互換の積に分解して

$$\sigma = (1\ 5)(1\ 9)(1\ 7)(2\ 4)(2\ 6)(3\ 8)$$

- したがって

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^6 = 1$$

対称群(置換群)

定義7.20
- n 文字の置換全体を S_n と書き，n 次対称群(置換群)と呼ばれる.

- n 文字の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

は $k_1, k_2, \cdots, k_n$ が定まれば一意的に決まるため，S_n の元の個数は n 個の順列の個数に等しく，$n!$ である.

- S_n は群と呼ばれる代数構造の基本例になっている.

対称群(置換群)

例7.21

- 2文字の置換全体は

$$S_2 = \{\, e, (1\ 2)\,\}$$

- 3文字の置換全体は

$$S_3 = \{\, e, (1\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\,\}$$

- 4文字の置換全体は

$$S_4 = \left\{ \begin{array}{c} e, (1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4), \\ (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), \\ (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), \\ (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2) \end{array} \right\}$$

まとめ

- 行列式
  - 2, 3次の場合
  - サラスの方法

- 置換
  - 合成
  - 逆置換
  - 巡回置換
  - 互換
  - 符号