# 線形代数
# 第13回「対角化」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

# 今日の内容

- 行列の対角化に関して解説する.

1. 固有値問題の復習
2. 行列の対角化
3. 対角化の応用

# 固有値問題

定義13.1

- $n$ 次正方行列 $A$ が定義する線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して, $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ が存在して

$$f_A(\boldsymbol{v}) = \lambda\,\boldsymbol{v}$$

となるとき, $\lambda$ を $A$ の固有値, $\boldsymbol{v}$ を $A$ の固有ベクトルという.

定義13.2

- $\lambda \in \mathbb{R}$ を $A$ の固有値とするとき, 部分空間

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f_A(\boldsymbol{v}) = \lambda\,\boldsymbol{v}\} \subset \mathbb{R}^n$$

を固有値 $\lambda$ の固有空間という. $\mathbf{0} \in V(\lambda)$ に注意する.

# 固有多項式

定義13.3

- $n$ 次正方行列 $A$ に対して，行列式

$$\varphi_A(t) = |t\,E_n - A|$$

を $A$ の固有多項式という.

定理13.4

- 線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に関して，次は同値である:

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ は $A$ の固有値
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ は $A$ の固有多項式の解，つまり $\varphi_A(\lambda) = 0$

# 固有値問題

- $n$ 次正方行列 $A$ の固有値と固有空間を求めるには

1. 固有多項式 $\varphi_A(t)$ の解

$$\varphi_A(t) = 0$$

   を求める. これらが固有値.

2. 各固有値 $\lambda$ に対して

$$(\lambda E_n - A)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

   を解いて, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を求める. 固有値 $\lambda$ に属する固有ベクトル全体と $\boldsymbol{0}$ の集合が固有空間 $V(\lambda)$ .

# 固有値問題(例)

例13.5

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ が定義する線形写像 $f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考える.
- 固有多項式は

$$\varphi_A(t) = |t\,E_2 - A| = \begin{vmatrix} t-4 & -3 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-5)$$

なので, 固有値は $t = 1, 5$ .

- 固有値 $t = \lambda$ の固有ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を求めるには

$$(\lambda\,E_2 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

を解けばよい.

- $t = 1$ の場合, $(E_2 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より, $V(1) = \mathbb{R}\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ .
- $t = 5$ の場合, $(5\,E_2 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より, $V(5) = \mathbb{R}\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ .

# 対角化

定義13.6

- $n$ 次正方行列 $A$ に対して，適当な $n$ 次正方行列 $P$ を見つけて

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{（対角行列）}$$

の形にすることを**対角化**という.

- 行列は必ず対角化できるわけではないが，この講義では対角化可能な行列だけを扱う（後述）.
- 行列の対角化には深い意味と強力な応用がある.

# 対角化の流れ

- 一般論を展開する前に具体的かつ基本的な場合を考察する.

例13.7

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有空間は $V(1) = \mathbb{R}\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, V(5) = \mathbb{R}\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ .
- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ を固有値 $1, 5$ に属する固有ベクトルとし, $P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ とすると

$$A\,P = A[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = [A\,\boldsymbol{v}_1, A\,\boldsymbol{v}_2] = [\boldsymbol{v}_1, 5\,\boldsymbol{v}_2] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

すなわち

$$A\,P = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- 固有値 $1, 5$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ は一次独立であることが分かるので, 行列 $P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ の階数は $2$ , つまり正則である.
- 上記の式の両辺に左から $P^{-1}$ を掛けることで

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

となり, $A$ を対角化できた.

# 対角化の流れ

- 実際，$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ の固有値 1, 5 に属する固有ベクトルを並べて得られる行列として，$P=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ を考えれば，

$P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ であり

$$
\begin{aligned}
P^{-1}\,A\,P &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 15\\ -1 & 5\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 20\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

が確認できる．

# 対角化定理

定理13.8

- $n$ 次正方行列 $A$ の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が相異なるとする.
- $\boldsymbol{v}_i$ を固有値 $\lambda_i$ の属する固有ベクトルとする.
- $n$ 次正方行列 $P$ を

$$P = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$$

で定義すると, $P$ は正則になり

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- つまり $P$ は $A$ を対角化する.

- $P$ が正則であることに関してはスライドの最後の補足を参照せよ.
- $P$ の取り方は一意ではない.
- 証明に関しては, 直前の2次正方行列の議論がそのまま適用できる.

# 対角化(問題)

問題13.9

- 次の行列を対角化する行列 $P$ と対角化後の行列を求めよ.
- また，実際に対角化できていることを確認せよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

- 前回の講義で固有空間はすでに計算した.

# 行列の冪乗

例13.10

- 対角化の重要な応用として，$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ に対して，$A^{100}$ を求める.
- まず $P=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ に対して，$P^{-1}\,A\,P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ であったので

$$(P^{-1}\,A\,P)^{100}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}^{100}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5^{100}\end{bmatrix}$$

- 左辺の積を具体的に書くと

$$(P^{-1}\,A\,P)^{100}=P^{-1}\,A\,P\,P^{-1}\,A\,P\cdots P^{-1}\,A\,P \quad =P^{-1}\,A^{100}\,P$$

- したがって

$$A^{100}=P\,(P^{-1}\,A\,P)^{100}\,P^{-1}=P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5^{100}\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5^{100}\end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1+3\cdot 5^{100} & -3+3\cdot 5^{100}\\ -1+5^{100} & 3+5^{100}\end{bmatrix}$$

# 行列の冪乗(問題)

問題13.11

- 行列 $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ に関して, $A^2, A^3, A^n$ を計算せよ.

- $A^2=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -1 & 8\end{bmatrix}$, $A^3=\begin{bmatrix}1 & 28\\ 7 & -20\end{bmatrix}$
- $P=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1}\,A\,P=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ であるから

$$(P^{-1}\,A\,P)^n=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}(-3)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}$$

- 左辺は $P^{-1}\,A^n\,P$ であるから

$$\begin{aligned}A^n&=P\begin{bmatrix}(-3)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}P^{-1}\\&=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-3)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}(-3)^n+2^{n+2} & -4(-3)^n+2^{n+2}\\ -(-3)^n+2^n & 4(-3)^n+2^n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

# 対角化の応用（発展）

定義13.12

- 次の漸化式で定義される数列 $\{a_i\}$ はフィボナッチ数列と呼ばれる.

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

- 具体的に値を求めてみると

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

- 一般項 $a_n$ を線形代数を使って求めてみる.
- 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ は，行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を使えば

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

- したがって

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{bmatrix} = \cdots = A^{n-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

- つまり，一般項を求めるには，行列 $A^n$ を計算すればよい.

# 対角化の応用(発展)

- 固有多項式は $\varphi_A(t) = t^2 - t - 1$, $A$ の固有値は $\phi_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
- 関係式 $\varphi_A(\phi_\pm) = {\phi_\pm}^2 - \phi_\pm - 1 = 0$ を用いると

$$A\begin{bmatrix}\phi_\pm \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_\pm + 1 \\ \phi_\pm\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_\pm^2 \\ \phi_\pm\end{bmatrix} = \phi_\pm \begin{bmatrix}\phi_\pm \\ 1\end{bmatrix}$$

- つまり, 固有空間は $V(\phi_+) = \mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix}\phi_+ \\ 1\end{bmatrix}\right\rangle$, $V(\phi_-) = \mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix}\phi_- \\ 1\end{bmatrix}\right\rangle$
- $P = \begin{bmatrix}\phi_+ & \phi_- \\ 1 & 1\end{bmatrix}$ とすれば, $P^{-1}\,A\,P = \begin{bmatrix}\phi_+ & 0 \\ 0 & \phi_-\end{bmatrix}$
- 詳細は省略するが, $A^{n-1}$ が求まって

$$\begin{bmatrix}a_n \\ a_{n-1}\end{bmatrix} = A^{n-1}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\phi_+^n - \phi_-^n \\ \phi_+^{n-1} - \phi_-^{n-1}\end{bmatrix}$$

- フィボナッチ数列の一般項は

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_+^n - \phi_-^n)$$

# 他分野への応用

- その他の重要な応用として
  - 共分散行列の対角化（主成分分析）
  - ヘッセ行列の対角化（多変数関数の極値の形状分析）
  - 遷移行列の対角化（確率過程の時間発展分析）
  - …

などがある.

# まとめ

- 固有値問題の復習
- 行列の対角化
- 対角化の応用

# 固有ベクトルの一次独立性（補足）

- 定理13.8では $n$ 次正方行列 $A$ に「相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が存在する」ことを仮定した.
- これは常に成り立つとは限らず，対角化可能性の十分条件である.

定理13.13

- $n$ 次正方行列 $A$ の相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s$ とする.
- このとき $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s$ は線形独立である.

証明

- 帰納法で示す.
- まず，$\boldsymbol{v}_1 \neq 0$ は一次独立なので成り立つ.
- 次に $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立だが，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}$ は一次独立でないと仮定する. このとき

$$\boldsymbol{v}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i \qquad \exists c_i \in \mathbb{R},\ \exists c_j \neq 0 \tag{1}$$

# 固有ベクトルの一次独立性（補足）

- (1)の両辺に $A$ を掛けて $A\,\boldsymbol{v}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i\,A\,\boldsymbol{v}_i$, これより

$$\lambda_{r+1}\,\boldsymbol{v}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i\,\lambda_i\,\boldsymbol{v}_i \qquad (2)$$

- 一方で，(1)の両辺に $\lambda_{r+1}$ を掛けて

$$\lambda_{r+1}\,\boldsymbol{v}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i\,\lambda_{r+1}\,\boldsymbol{v}_i \qquad (3)$$

- (2)と(3)から

$$\sum_{i=1}^{r} c_i\,(\lambda_{r+1} - \lambda_i)\,\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

を得るが，固有値が異なることから，$\lambda_{r+1} - \lambda_i \neq 0$，かつ $\exists c_j \neq 0$ より，ある $\boldsymbol{v}_i$ の係数は $0$ ではない．

- これは $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ の一次独立性に矛盾する．