線形代数
第14回「内積」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

- 内積に関係する話題に関して解説する

1. 内積, 正規直交基底
2. グラム・シュミットの正規直交化法
3. 計量線形性, 直交行列

内積

定義14.1

- $\mathbb{R}^n$ 上の内積を，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ に対して

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} = [x_1, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \in \mathbb{R}$$

で定義する.

- また，$x \in \mathbb{R}^n$ の**ノルム**(長さ)を次で定義する.

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

双線形性

定理14.2

- 内積は写像 $(\_,\_) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ であり,
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$ に関して以下が成り立つ.

1. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$
2. $(a\,\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
3. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$
4. $(\boldsymbol{x}, a\,\boldsymbol{y}) = a\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

- これらを内積の双線形性という.

- たとえば

$$(a\,\boldsymbol{x} + b\,\boldsymbol{y}, c\,\boldsymbol{z} + d\,\boldsymbol{w}) = a\,c\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + a\,d\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) + b\,c\,(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) + b\,d\,(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w})$$

- さらに, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に関して以下が成り立つ.

5. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$
6. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$
7. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$

シュワルツの不等式

定理14.3(シュワルツの不等式)

- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|$$

- 等号成立の必要十分条件は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が一次従属であること.

- 不等式を具体的に書けば

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

シュワルツの不等式(証明)

- $\boldsymbol{y} = 0$ であれば両辺とも 0 であるから成り立つ.
- そこで, $\boldsymbol{y} \neq 0$ と仮定する.
- $k = \dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{y}\|^2}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \|\boldsymbol{x} - k\,\boldsymbol{y}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + k^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{y}\|^2} + \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{y}\|^2} \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 - \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{y}\|^2}
\end{aligned}
$$

- これより $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2$ であり, $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$ となる.
- 等号が成り立つのは $\boldsymbol{x} - k\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ のときに限る.
- つまり, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は一次従属.

三角不等式

定理14.4（三角不等式）

- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

- 等号成立の必要十分条件は，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が一次従属であること.

証明

- 直接計算で示すことができる.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \qquad (\because \text{定理14.3}) \\ &= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2\end{aligned}$$

極化恒等式

定理14.5（極化恒等式）

- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(x, y) = \frac{1}{4}\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 - \frac{1}{4}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$$

証明

- 右辺を計算で示すことができる.

$$\begin{aligned}
& \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\
-)\ & \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\
\hline
& \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 4(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

角度・直交性

定義14.6

- シュワルツの不等式(定理14.3)より

$$-1 \le \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} \le 1$$

であるから

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}$$

となる $0 \le \theta \le \pi$ が存在する.

- この θ を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のなす角度という.
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ (つまり $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$) であるとき, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は直交するという.
- 定義より, $\boldsymbol{0} \in V$ は全ての元と直交する.

正規直交性

定義14.7

- $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ が正規直交であるとは

$$\left(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

となることをいう.（δ_{ij} : クロネッカーのデルタ）

- つまり, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ が正規直交であるとは,
  1. 各ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ の長さが 1 である: $\|\boldsymbol{v}_i\| = 1$
  2. $i \neq j$ であれば, $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j$ が直交する: $\left(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\right) = 0$

正規直交性と一次独立

定理14.8

- $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ が正規直交であれば一次独立である.

証明

- $\sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ とすると

$$\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = c_j \|\boldsymbol{v}_j\|^2 = c_j$$

- 一方で, $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}_j) = 0$ であるから $c_j = 0$ であり, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は一次独立.

- 一般に, 一次結合の係数が内積で取り出せる事実は重要である.

$$\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\right) = c_j$$

正規直交基底

定義14.9

- $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ が正規直交基底であるとは，基底かつ正規直交であることをいう.

- 例えば，$\mathbb{R}^n$ 標準基底

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

は正規直交基底である.

正規直交基底(例)

例14.10

- $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底として $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ や $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ を考えることができる.

- 実際, 例えば

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\pm 1\end{bmatrix}\right\|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\pm 1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\pm 1\end{bmatrix}\right) = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right) = 0$$

正規直交基底

- 正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \boldsymbol{v}_i \qquad\qquad x_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)$$

と書くことができる.

- $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \boldsymbol{v}_i$ との内積は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \, \boldsymbol{v}_i \, , \sum_{i=1}^{n} y_i \, \boldsymbol{v}_i \right) \quad = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$$

- 特に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ として

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

射影

定義14.11

- 長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{u}$ 方向への射影を次で定義する．

$$p_{\boldsymbol{u}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\langle \boldsymbol{u} \rangle, \quad \boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u}$$

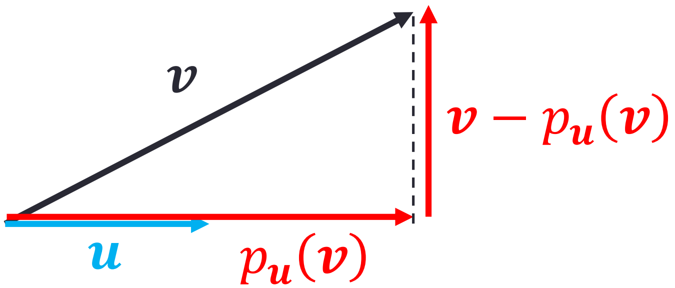
- $p_{\boldsymbol{u}}$ は $\boldsymbol{v}$ を直線 $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{u} \rangle$ へ直交射影する線形写像である．
- 実際

$$\big(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - p_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v})\big) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u})$$
$$= (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\, \|\boldsymbol{u}\|^2 = 0$$

であり，直交分解

$$\boldsymbol{v} = p_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) + \big(\boldsymbol{v} - p_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v})\big)$$

が成り立っている．



グラム・シュミットの正規直交化法

- 任意の一次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ に対して，正規直交するベクトル $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_k \in \mathbb{R}^n$ で

$$\mathbb{R}\langle \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_k \rangle = \mathbb{R}\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle$$

なるものを構成する標準的な方法が存在する.

- より厳密には，任意の $1 \leq i \leq k$ に対して

$$\mathbb{R}\langle \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_i \rangle = \mathbb{R}\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i \rangle$$

が成り立つ.

- この構成法は，グラム・シュミットの正規直交化法と呼ばれる.
- 特に $k = n$ として，任意の基底から正規直交基底が得られる.

グラム・シュミットの正規直交化法(1)

- (ステップ1) : まず

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}$$

と定義する.

- このとき

$$\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = \left(\frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}, \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\right) = \frac{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2} = 1$$

であるから, $\boldsymbol{w}_1$ は長さ 1 に正規化されている.

- (ステップ2) : 次に

$$\boldsymbol{w}_2' = \boldsymbol{v}_2 - p_{\boldsymbol{w}_1}(\boldsymbol{v}_2)$$

と定義する.

- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は一次独立であるから, $\boldsymbol{w}_2' \neq \boldsymbol{0}$ であり, $\boldsymbol{w}_2'$ は $\boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{w}_1$ 方向と直交分解したものなので, $\boldsymbol{w}_2'$ は $\boldsymbol{w}_1$ と直交する.
- そして, 次のように $\boldsymbol{w}_2$ を定義することで長さを 1 に正規化する.

$$\boldsymbol{w}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2'}{\|\boldsymbol{w}_2'\|}$$

グラム・シュミットの正規直交化法(2)

- (ステップ3):次に

$$\boldsymbol{w}_3' = \boldsymbol{v}_3 - p_{\boldsymbol{w}_1}(\boldsymbol{v}_3) - p_{\boldsymbol{w}_2}(\boldsymbol{v}_3)$$

と定義する.

- $\boldsymbol{w}_3'$ は $\boldsymbol{v}_3$ から $\boldsymbol{w}_1$ 方向への射影と $\boldsymbol{w}_2$ 方向への射影を除いたものなので, $\boldsymbol{w}_1$ と $\boldsymbol{w}_2$ に直交する.

- そして, 次のように 長さを 1 に正規化する.

$$\boldsymbol{w}_3 = \frac{\boldsymbol{w}_3'}{\|\boldsymbol{w}_3'\|}$$

- この手続きを繰り返す

- (ステップ j):まず

$$\boldsymbol{w}_j' = \boldsymbol{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} p_{\boldsymbol{w}_i}(\boldsymbol{v}_j)$$

と定義し, 次に

$$\boldsymbol{w}_j = \frac{\boldsymbol{w}_j'}{\|\boldsymbol{w}_j'\|}$$

で長さを 1 に正規化する. このとき $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_k$ は正規直交する.

グラム・シュミットの正規直交化法(例)

- $\mathbb{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ にグラム・シュミットの正規直交化法を適用する.
- まず

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 次に

$$\boldsymbol{w}_2' = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)\, \boldsymbol{w}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- したがって，正規直交基底

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

を得る.

- 一方で，基底順番を入れ替えて $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に適用すると，別の正規直交基底を得る.

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

グラム・シュミットの正規直交化法（例）

- $\mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ に正規直交化法を適用する.
- まず

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

- 次に

$$\boldsymbol{w}_2' = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)\,\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix} - \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{w}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2'}{\|\boldsymbol{w}_2'\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}$$

- 最後に

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}_3' = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)\,\boldsymbol{w}_1 \\ -(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)\,\boldsymbol{w}_2\end{aligned} = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} - \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} = -\frac{5}{8}\begin{bmatrix}-1\\-4\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_3 = \frac{\boldsymbol{w}_3'}{\|\boldsymbol{w}_3'\|} = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{bmatrix}-1\\-4\\1\end{bmatrix}$$

- よって，以下の正規直交基底が得られる.

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{w}_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{bmatrix}-1\\-4\\1\end{bmatrix}$$

計量線形性

定義14.12

- n 次正方行列 A が定義する線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が計量線形(もしくは計量を保つ)とは，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して
$$\left(f_A(\boldsymbol{x}), f_A(\boldsymbol{y})\right) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$
が成り立つこと.

- f_A が計量線形であるとき，f_A は単射となる.
- まず，$f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ とすれば
$$0 = \|f(\boldsymbol{x})\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$$
より，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．つまり計量線形写像はベクトルの長さと角度を変えないので，ベクトルが潰れることはない.
- さらに，$f_A(\boldsymbol{x}) = f_A(\boldsymbol{y})$ とすれば，線形性より $f_A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ であるが，上に示したことより，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. よって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

直交行列

定義14.13

- n 次正方行列 A が直交行列であるとは

$$ {}^t\!A\,A = E_n $$

が成り立つこと. つまり, $A^{-1} = {}^t\!A$.

- $\mathbb{R}^n$ の内積が

$$ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} = [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i $$

で与えられることを思い出す.

直交行列の性質

定理14.14

- n 次正方行列 A に関して次は同値である.

1. A は直交行列である.
2. $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{v} \mapsto A\,\boldsymbol{v}$ は計量線形である.
3. A の列ベクトルは $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である.

証明

- 1 ⇒ 2 : 一般に行列の積の転置に関して ${}^t(B\ C) = {}^tC\ {}^tB$ に注意すると

$$(A\,\boldsymbol{x}, A\,\boldsymbol{y}) = {}^t(A\,\boldsymbol{x})\,A\,\boldsymbol{y} = \left({}^t\boldsymbol{x}\ {}^tA\right) A\,\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\left({}^tA\,A\right)\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

- 2 ⇒ 3 : $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{e}_i \mapsto A\,\boldsymbol{e}_i$ であって，正規直交基底の計量線形写像の像は正規直交基底になるため.
- 3 ⇒ 1 : $\left({}^tA\,A\right)_{ij} = \left(A\,\boldsymbol{e}_i, A\,\boldsymbol{e}_j\right) = \delta_{ij}$ より，${}^tA\,A = E_n$.

まとめ

- 内積に関係する話題に関して説明した.

1. 内積, 正規直交基底
2. グラム・シュミットの正規直交法
3. 計量線形性, 直交行列