線形代数
第1回「講義概要」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

講義概要

- 線形代数の基礎事項に関して講義する.
- 線形代数はベクトルと行列に関する理論であり，データサイエンス，経済学，工学など幅広い分野で基礎となる数学である.
- 実際，その強力な手法と幅広い応用ゆえ，線形代数は微分積分と合わせて大学数学の2 本柱と位置付けられることが多い.
- 本講義では，線形代数の基本的な考え方を代数と幾何の両面から解説する.

1. ベクトル，行列，線形写像(一次変換)，..
2. 連立一次方程式: 拡大係数行列，行基本変形，階数(ランク)，..
3. 行列式，余因子展開，逆行列，..
4. 固有値，固有ベクトル，対角化，..

線形代数とは?

- 線形代数とは線形な代数のこと.
- 「線形」とは直感的には「まっすぐな」という意味.
- 実世界は極めて非線形(＝曲がっている)なので, しばしば線形近似する.
  - (幾何) ベクトル, ”行列＝線形変換”
  - (代数) 連立一次方程式, ”行列=(拡大) 係数行列”
- 線形代数はデータサイエンス(DS)においても重要.
  - 雑に言えば,データ（情報）はベクトルに対応する.
  - 情報を関係付けるもので最も基本的なものが線形写像である.

DS	線形代数
データ	ベクトル
データ集合	ベクトル空間
データの間の関係	線形写像

応用

- 線形代数は数学の基礎理論の1つであり，その応用範囲は非常に広い.
- ほとんど全ての理系の学問に関係するとも言える.

1. 微積分，統計，機械学習，...
2. 画像処理，3次元 CG，次元削減，...
3. 経済学，オペレーションズ・リサーチ，ゲーム理論，...
4. 量子力学，特殊相対論，フーリエ解析，...
5. 情報理論，符号理論，量子情報，...
6. ...

記号について

- 数の集合
  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, \}$:自然数全体
  - $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, \}$ ：整数全体
  - $\mathbb{R}$: 実数全体

- 集合論
  - $s \in S$ ：s は集合 S の元である
  - $s \notin S$ ：s は集合 S の元でない
  - $R \subset S$ ：R は S の部分集合. R の元は全て S の元である.

ベクトル

定義1.1

- n 個の実数 $a_1, \ldots, a_n$ を並べたものをベクトルといい，$a_1, \ldots, a_n$ をその成分という.
- 成分を縦に並べた組

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

を（n 次元）列ベクトルといい，

- 横に並べた

$$[a_1, \quad \ldots, \quad a_n]$$

を（n 次元）行ベクトルという.

- 通常，ベクトルは列ベクトルを指すことが多いので，本講義でも列ベクトルを意味することとする.

数ベクトル空間

定義1.2

- n 次元列ベクトル全体の空間を $\mathbb{R}^n$ で表し，n次元数ベクトル空間という.

- 線形代数ではベクトルは

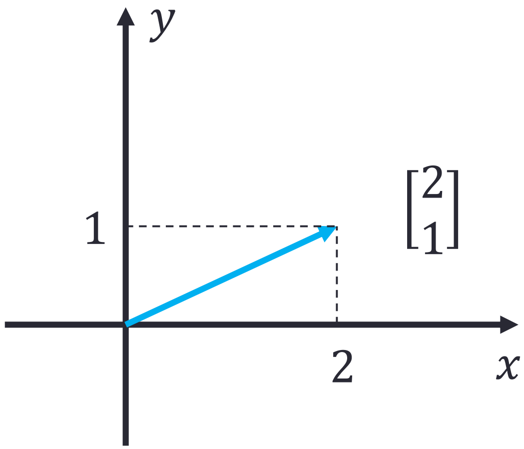
$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

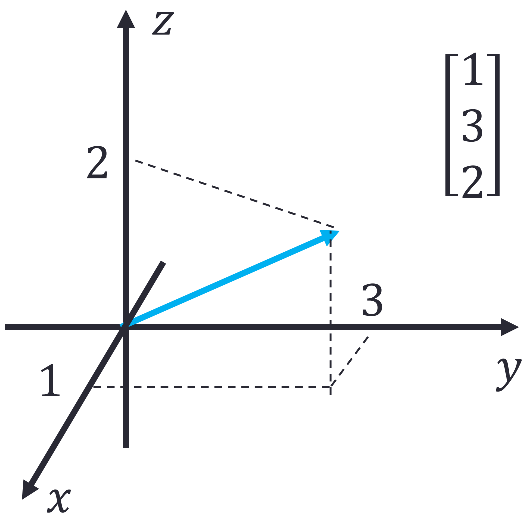
のように太文字を用いる. (高校までは $\vec{a}$ とも書いた.)

- また実数を，ベクトルとの対比において強調するために，スカラーと呼ぶ.
- ベクトルとは方向と大きさを持った量であり，スカラーとは大きさのみを持った量である.

幾何学的解釈

- 2, 3次元では幾何学的解釈が比較的容易である.





- 4次元以上でも, それらの類似と考えることができる.

ベクトルの演算

- ベクトルには和とスカラー倍という2つの演算が定義される.
- 2つの(n次元)ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

およびスカラー $k \in \mathbb{R}$ を考える.

- ベクトルの和を

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

で定義する. つまり成分ごとの和である.

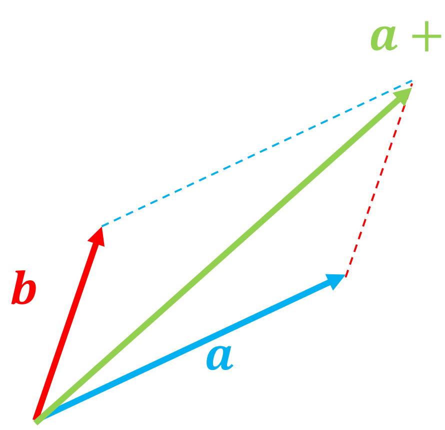
- スカラー倍を

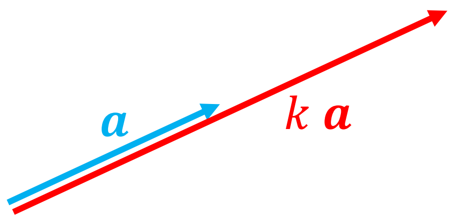
$$k\,\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} k\,a_1 \\ \vdots \\ k\,a_n \end{bmatrix}$$

で定義する. つまり各成分を k 倍する.

幾何学的解釈

- ベクトル $\boldsymbol{b}$ を平行移動させて，$\boldsymbol{a}$ の終点と $\boldsymbol{b}$ の始点が一致させたとき，$\boldsymbol{a}$ の始点から $\boldsymbol{b}$ の終点に到る矢印が表すベクトルがベクトルの和 $\boldsymbol{a}+\ \boldsymbol{b}$ である，
- スカラー倍 $k\ \boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ のスケール変換である．$k\ \boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ を含む直線上にあって，長さが $\boldsymbol{a}$ の $|k|$ 倍のベクトルである．ここで $k<0$ のときは，$k\ \boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と反対方向を向いている．





ベクトルの演算(例)

例1.3

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 \\ -2+0 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$4\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

逆ベクトル

定義1.4

- ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$(-1)\,\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルといい，$-\boldsymbol{a}$ で表す.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \qquad -\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

- つまり, $\boldsymbol{a}$ と同じ長さで向きが反対のベクトルが $-\boldsymbol{a}$ である.

零ベクトル

定義1.5

- 全ての成分が 0 であるベクトルを零ベクトルといい，$\mathbf{0}$ で表す.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 任意のベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ.

ベクトルの差

- ベクトルの差は和とスカラー倍を組み合わせることで定義される．つまりベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に関して

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-1)\,\boldsymbol{b}$$

で定義される．

- これは

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}$$

と同じことである．

例1.6

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-7 \\ -2-(-1) \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

行列(1)

次に行列を導入する.

- ベクトルは実数を縦に並べたものであった.
- ベクトルには長さ(次元)があった.

- 行列とは実数を長方形の形に並べたものである.
- 行列には縦横のサイズ(型)がある.

行列(2)

定義1.7

- 2つの自然数 m, n に対して, mn 個の実数

$$a_{ij} \qquad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

を次のように長方形に並べてカッコで括ったものを $m \times n$ 行列
((m,n) 行列, m 行 n 列の行列)という.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 実数 a_{ij} を行列 A の (i, j) 成分という
- (m, n) を型(サイズ)という.

- 成分の添字の ij は $i \times j$ の意味ではない.

行列（3）

- 次の行例の型は何か？

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 11 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

行列(4)

- 行列は大文字 A, B, C を用いて表すことが多い.
- また, a_{ij} を (i, j) 成分とする行列を $A = (a_{ij})$ と略記する.
- ベクトルは行列の特別な場合である.
- 実際, 行ベクトルは $1 \times n$ 行列,

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

- 列ベクトルは $m \times 1$ 行列と考えることができる.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

行と列（1）

定義1.8

- 行列 $A=(a_{ij})$ の上から i 番目の横の並び

$$[a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}]$$

を A の第 i 行という. これは n 次元行ベクトルである.

- 行列 A の左から j 番目の縦の並び

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

を A の第 j 列という. これは m 次元列ベクトルである.

行と列（2）

- 次の行列の型，(i, j) 成分，第 i 行，第 j 列は何か？

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 11 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- たとえば，3つ目の行列に関して，第2列と第3行は

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix}$$

零行列

定義1.9

- 全ての成分が 0 である行列を**零行列**といい，O で表す．

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- m, n の組に対して $m \times n$ 行列の零行列が定まることに注意する．
- 行列の型を強調する必要があるとき以外は，単に O で表すことが多い．

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

正方行列

定義1.10

- $m = n$ であるとき，つまり行と列の数が等しい行列を(n 次)正方行列という.
- 正方行列の対角線上に並ぶ成分

$$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$$

を対角成分という.

- また，対角成分以外の成分がすべて 0 であるような行列を対角行列という.

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 正方行列には2つの対角が存在するが，線形代数では左上から右下への対角を意味する.

単位行列

定義1.11

- 対角成分がすべて 1 であるような n 次対角行列を単位行列といい，E_n と書く.

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- 行列の型を強調する必要がないときには，単に E と表すことが多い.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

転置行列(1)

定義1.12

- 行列 A の行と列を入れ替えた行列を A の**転置行列**といい，${}^tA$ で表す.
- A が $m \times n$ 行列であれば，${}^tA$ は $n \times m$ 行列である.
- 成分で書くと

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

のとき

$${}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

転置行列(2)

- 行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 11 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

の転置行列は，それぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 11 & -5 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

定理1.13

- ${}^t({}^tA) = A$ が成立することに注意.

対称・交代行列

定義1.13

- A を正方行列とする.
  1. ${}^tA = A$ なる行列を**対称行列**
  2. ${}^tA = -A$ なる行列を**交代行列**

  という. ただし, $-A$ は A の各成分に -1 を掛けて得られる行列である.

- 次の行列は対称行列か？交代行列か？

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

まとめ

- 講義概要

- ベクトル
  - 和
  - スカラー倍
  - 幾何学的意味

- 行列
  - 型
  - 行
  - 列
  - 零行列
  - 正方行列
  - 単位行列
  - 転置
  - 対称行列
  - 交代行列