線形代数
第4回「行列の積」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

- 行列はベクトルをベクトルに変換するので，写像とみなすことができた.
- この写像を線形写像といった.

- 線形写像
  - 回転
  - 線形性

- 線形写像の合成と行列の積
  - 同型写像
  - 逆行列

線形写像

定義4.1

- $m \times n$ 行列 A が与えられたとき，写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が行列の積で定義される.

$$f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{v} \mapsto A\,\boldsymbol{v}$$

f_A を A が定める**線形写像**(線形変換，一次変換)という.

注意:

- 分野によっては，列ベクトルではなく，行ベクトルを考えることがある.
- その場合には，全てを転置すればよい.
- 上の写像は ${}^t v \mapsto {}^t v\ {}^t A$ と同一視される.

線形写像

例4.2

- 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

は写像 $f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を定める.

$$f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x + 4y \end{bmatrix}$$

- 例えば

$$f_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

線形写像

例4.3

- 次の行列はそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の拡大縮小，鏡像反転，射影，零写像を定めた．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例4.4

- 単位行列 E_n が定める線形写像は恒等写像 $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ である．
- 実際，任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f_{E_n}(\boldsymbol{v}) = E_n\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$

- 一般に線形写像が「よく分かる写像」とは限らないが，知っておくべき基本的な例がいくつか存在する．

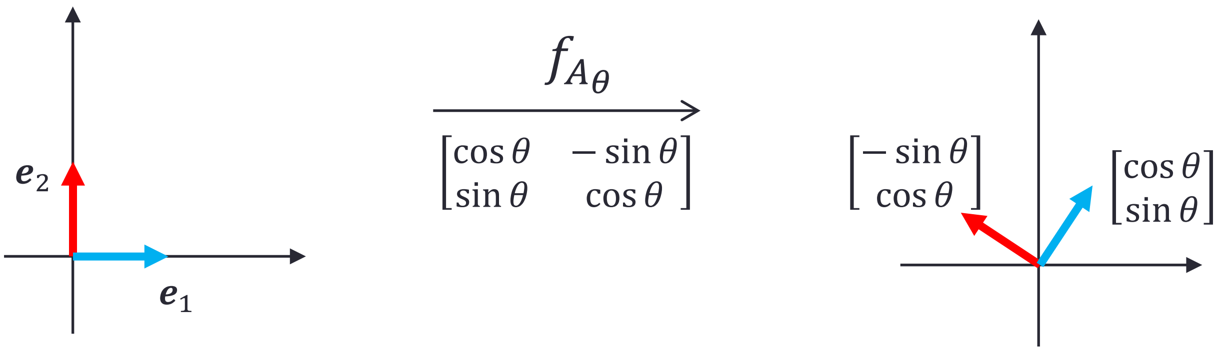
回転

例4.5

- 行列 $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ を考える.
- $A_\theta\, \boldsymbol{e}_1$ と $A_\theta\, \boldsymbol{e}_2$ を計算する.

$$A_\theta\, \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \qquad A_\theta\, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

- 行列 A_θ が定める線形写像 $f_{A_\theta}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は θ 回転である.



線形性

- 定数関数の次に簡単な関数が比例関数である.
- つまり, ある $C \in \mathbb{R}$ に対して
$$f(x) = C\,x$$
の形の関数である.
- この関数の基本的な性質として
  1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$
  2. $f(k\,a) = k\,f(a)$

  があげられる
- 逆に, これらの性質を持つ関数は比例関数になることも示すことができる.
- 線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は比例関数のベクトル版と考えることができる.

線形性

定理4.6

- $m \times n$ 行列 A が定める線形写像 $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は，任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ とスカラー $k \in \mathbb{R}$ に対して

  1. $f_A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f_A(\boldsymbol{u}) + f_A(\boldsymbol{v})$
  2. $f_A(k\,\boldsymbol{v}) = k\,f_A(\boldsymbol{v})$

  を満たす.
- これらの2つの性質を線形性という.

- 線形性とは，「和とスカラー倍が写像で保たれている」ことである.
- つまり，先に和をとってから写像で写しても，写像で写してから和をとっても結果は同じということである.
- スカラー倍に関しても同様.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\quad f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

- 例えば

$$f_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = f_A\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \end{bmatrix}$$

である.

- 一方で

$$f_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) + f_A\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \end{bmatrix}$$

なので，両者は一致する．スカラー倍に関しても同様．

線形性（発展）

- 線形写像という言葉が示唆するように，次の事実が知られている．

定理4.7

- 線形性を有する写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は適当な $m \times n$ 行列 A の積が定める線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ である．

- 実際，$A = [f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)]$ とすると
- 任意の $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ は標準基底を使って $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$ と書くことができるため，

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}) &= f(v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n) \\
&= v_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + v_n f(\boldsymbol{e}_n) \qquad (\because f \text{ は線形}) \\
&= A\,\boldsymbol{v} = f_A(\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

線形写像の合成

- 次に線形写像の合成が行列であることを見る.
- この事実が，行列の積の定義が適切なものであることを物語っている.
- 逆に言えば，この対応が成立するように行列の積が定義されているとも言える.

線形写像の合成と行列の積

定理4.8

- $m \times n$ 行列 A と $l \times m$ 行列 B はそれぞれ線形写像

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad \boldsymbol{u} \mapsto A\,\boldsymbol{u}$$

$$f_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, \qquad \boldsymbol{v} \mapsto B\,\boldsymbol{v}$$

を定める.

- これらの合成写像 $f_B \circ f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, つまり

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[rr, bend right, "f_B \circ f_A"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "f_B"] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

は, 行列 $B\,A$ が定める線形写像 $f_{B\,A}$ に一致する.

$$f_{B\,A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l, \qquad \boldsymbol{u} \mapsto (B\,A)\,\boldsymbol{u} \qquad f_B \circ f_A = f_{B\,A}$$

三角関数の加法公式

例4.9

- 回転行列 $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ に関して，積 $A_\alpha A_\beta$ を計算する.

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

- 幾何学的解釈により，これは $A_{\alpha+\beta}$ に一致するはずなので，三角関数の加法公式が得られる:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

線形写像の合成と行列の積

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を考える.

1. 線形写像 $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は「x 方向に3倍, y 方向へ $\frac{1}{2}$ 倍」
2. 線形写像 $f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は「直線 $x = y$ に関する鏡像反転」

- 合成写像 $f_B \circ f_A$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f_A"] \arrow[rr, bend right, "f_B \circ f_A"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f_B"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

と $f_A \circ f_B$

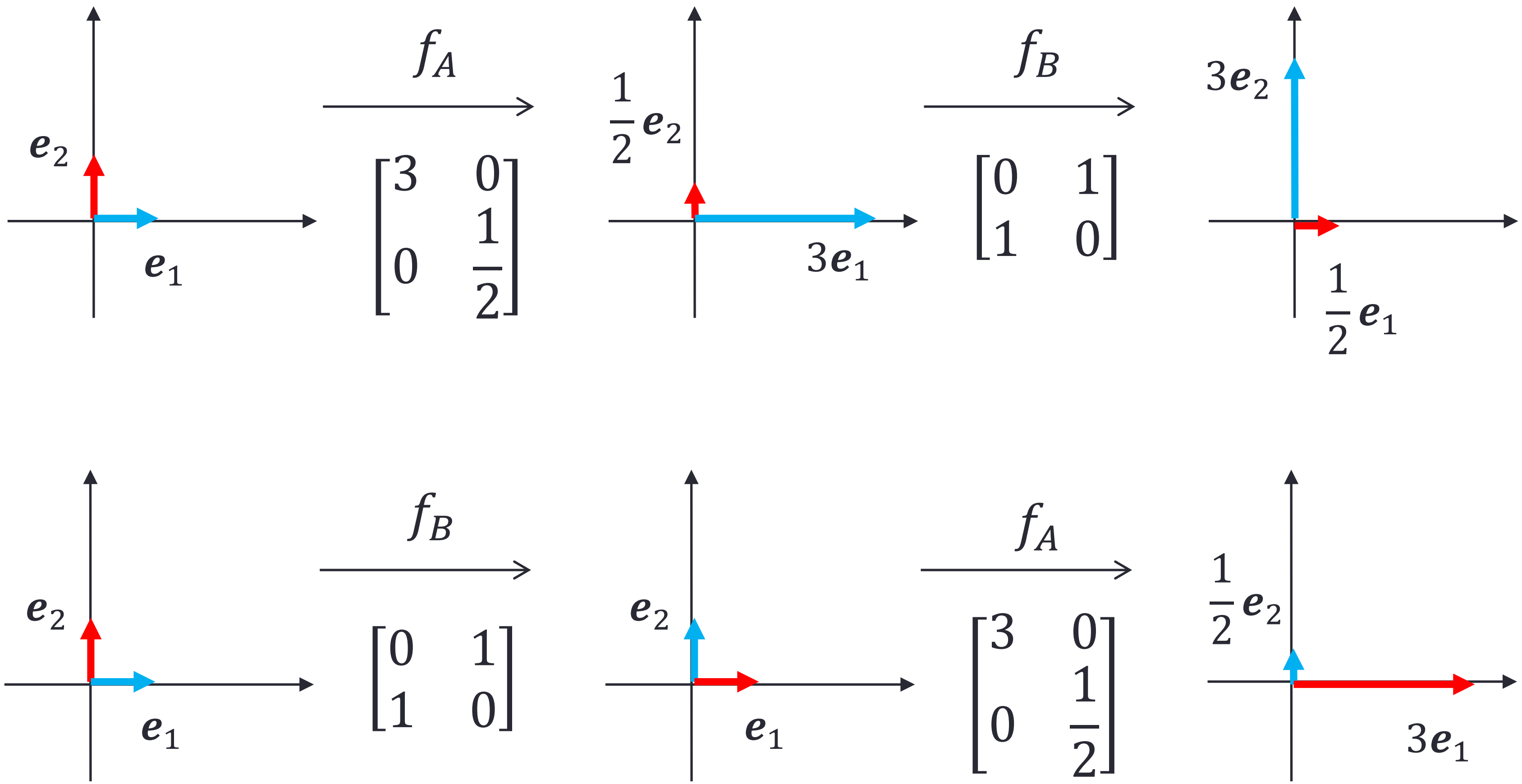
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_A \circ f_B"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

は同じ写像だろうか?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 合成写像 $f_B \circ f_A$ と $f_A \circ f_B$ の違いを見るために，例えば $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ がどう変換されるかを計算する．
- $f_B \circ f_A(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $f_A \circ f_B(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
- これにより，$f_B \circ f_A$ と $f_A \circ f_B$ は異なる写像であることが分かる．

$f_B \circ f_A \neq f_A \circ f_B$



$f_B \circ f_A \neq f_A \circ f_B$

- 定理4.8より $f_B \circ f_A$ と $f_A \circ f_B$ はそれぞれ行列 $B\ A$, $A\ B$ によって定義される線形写像であるが,

$$B\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\ B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

- 行列の積の非可換性は写像の合成が非可換であることから理解できる.
- 日常生活でも「右を向く」と「一歩進む」は可換ではない.
- 「右を向いてから，一歩進む」と「一歩進んでから，右を向く」は異なる結果をもたらす.

(非)可換性

- 一方で，行列 $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ はすべてのベクトルを3倍する線形写像 $f_C\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を定めるが，これは f_A, f_B と可換である.

- 実際

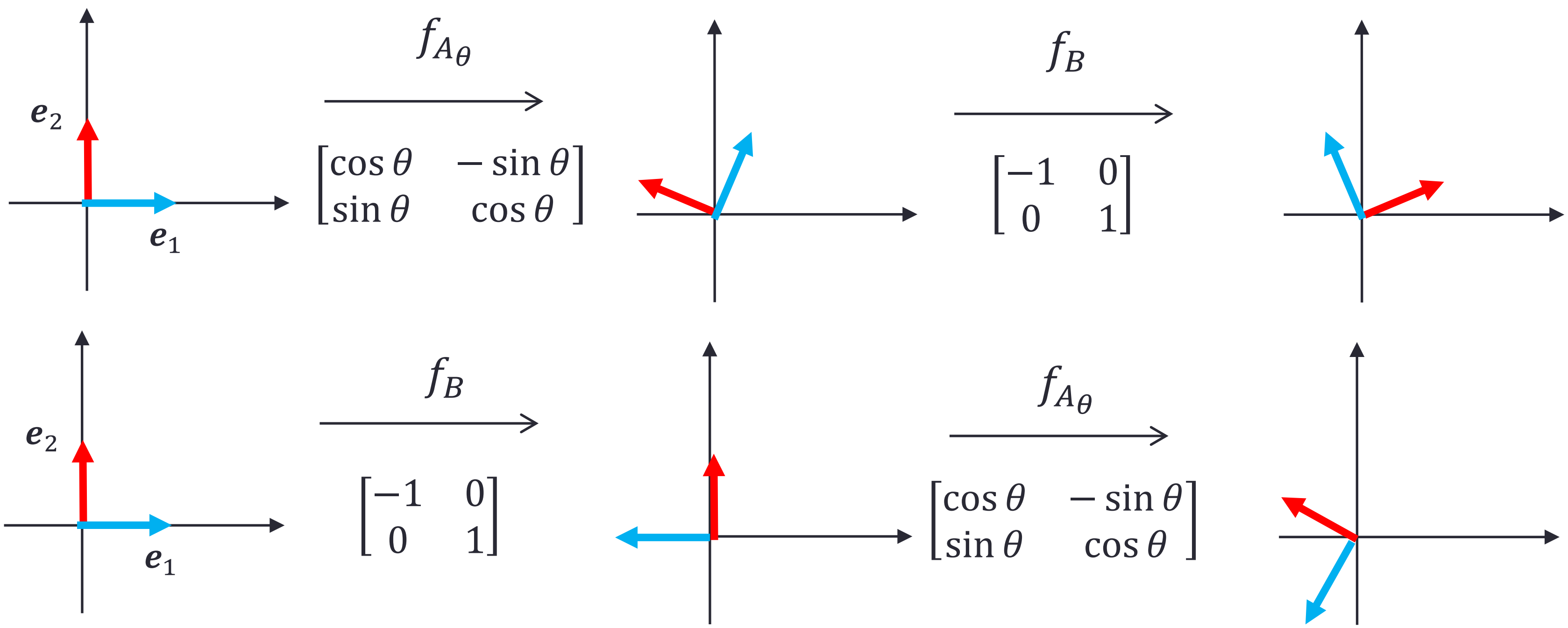
$$A\,C = 3A = C\,A \qquad B\,C = 3B = C\,B$$

が成立している.

線形写像の合成

例4.10

- 行列 $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ は θ 回転，行列 $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ は y 軸に関する鏡像反転を定めるのであった．
- A_θ と B は可換であるか，幾何学的に考察せよ．



同型写像

定義4.11

- $n \times n$ 行列 A が定める線形写像

$$f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{v} \mapsto A\,\boldsymbol{v}$$

が全単射であるとき，f_A を同型写像という.

- 同型写像とは $\mathbb{R}^2$ から自身への線形写像であって，逆写像が存在するようなものである.

全単射，正則行列

定理4.12

- $n \times n$ 行列 A が定める線形写像

$$f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{v} \mapsto A\,\boldsymbol{v}$$

が同型写像であるための必要十分条件は，A は正則行列であることである．

- 実際，A の逆行列 B が存在すれば

$$f_B \circ f_A(\boldsymbol{v}) = (B\ A)\,\boldsymbol{v} = E_n\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$
$$f_A \circ f_B(\boldsymbol{v}) = (A\ B)\,\boldsymbol{v} = E_n\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$

であるから，f_B が f_A の逆写像になっている．

同型写像(例)

例4.13

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ が定める線形写像 $f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は3倍写像であった.
- f_A は同型写像である.
- (単射性) $f_A(\boldsymbol{v}) = f_A(\boldsymbol{u})$ ならば $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ である.
  - 3倍して同じベクトルなら，もともと同じベクトル.
- (全射性) 任意の $\boldsymbol{v}$ に対して，$\boldsymbol{u}$ が存在して $f_A(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ となる.
  - どんなベクトルも，あるベクトルを3倍して得られる.
- 実際，A の逆行列は $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ であり，f_A の逆写像 f_B は $\frac{1}{3}$ 倍写像である.

同型写像(例)

例4.14

- 次の行列が定める $\mathbb{R}^2$ の線形写像は同型写像か?

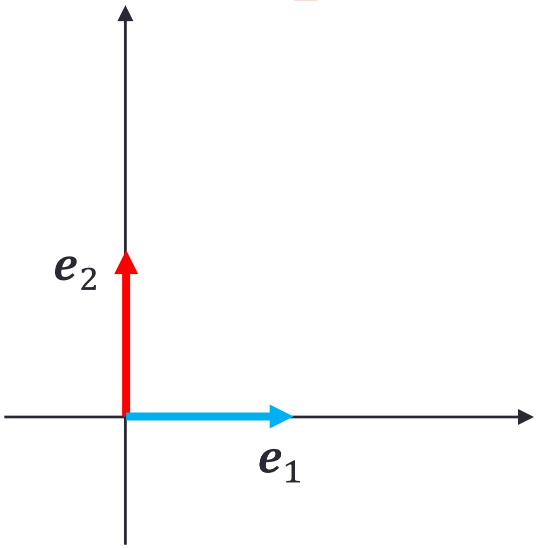
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

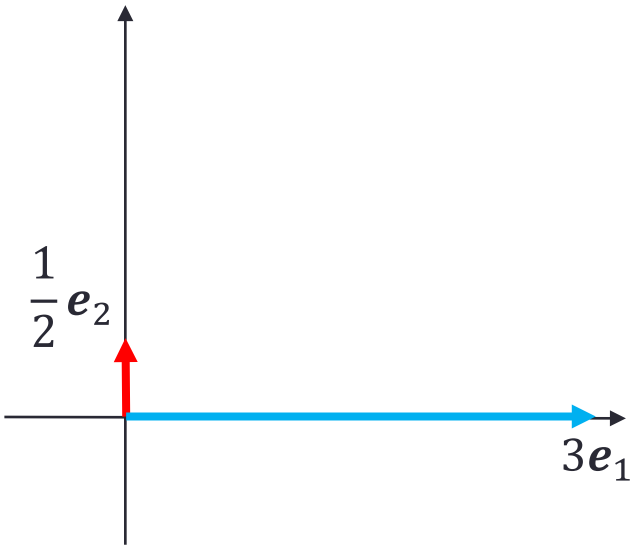
- 同型写像である場合，逆写像を与える行列は何か?

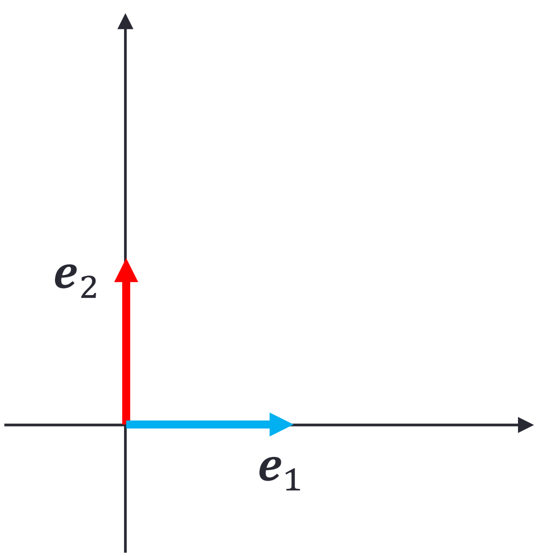
- 第2回講義で2次正方行列の逆行列の公式を紹介した.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

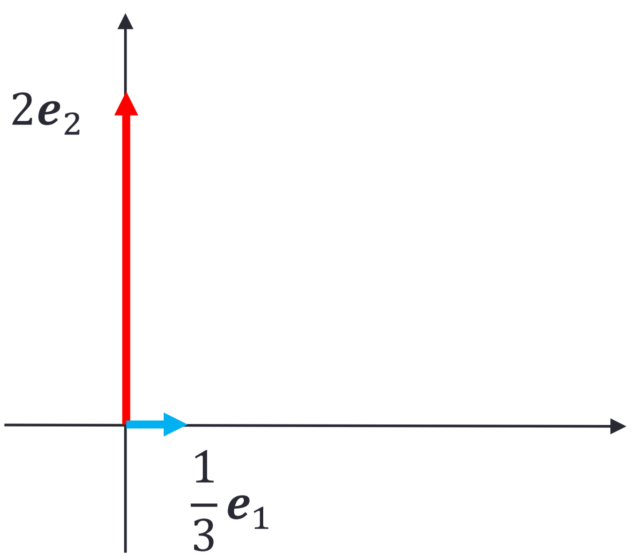


$$\xrightarrow[\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}]{f_A}$$

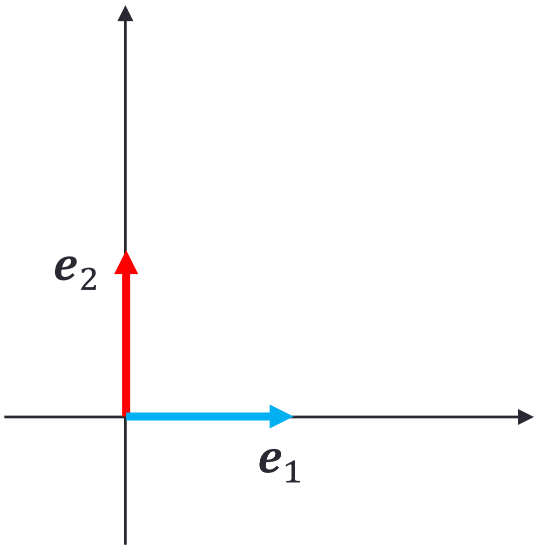




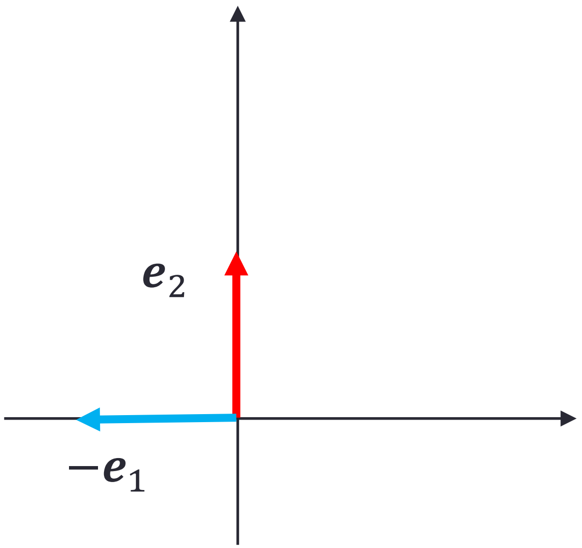
$$\xrightarrow[\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}]{f_{A^{-1}}}$$



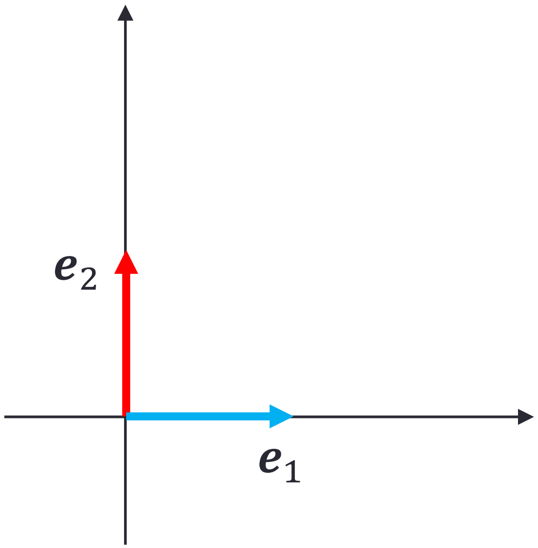
$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad f_B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$



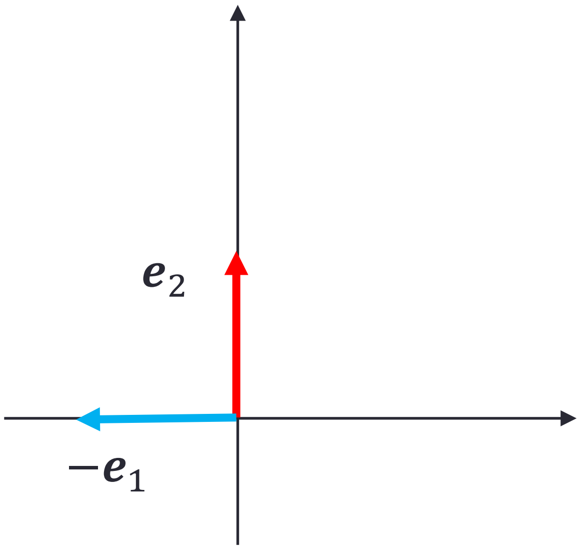
$$\xrightarrow[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}]{f_B}$$



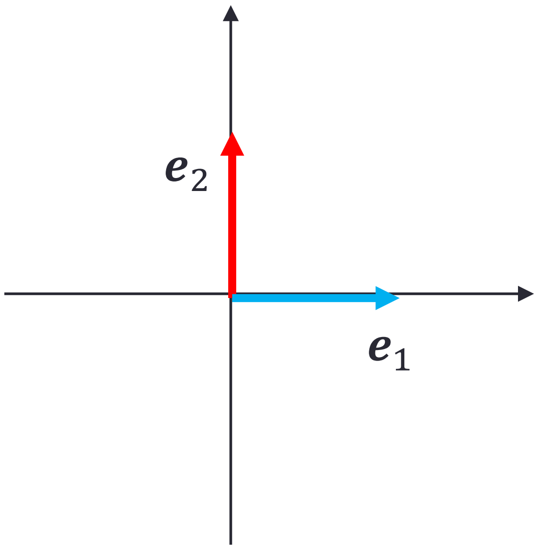
$$B^2 = E_2$$



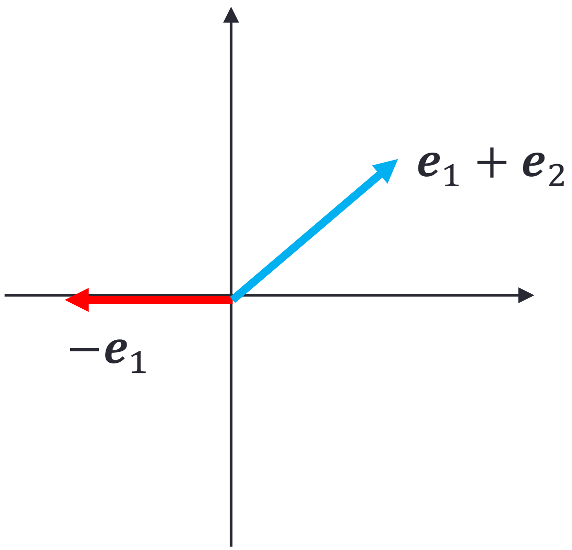
$$\xrightarrow[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}]{f_{B^{-1}}}$$

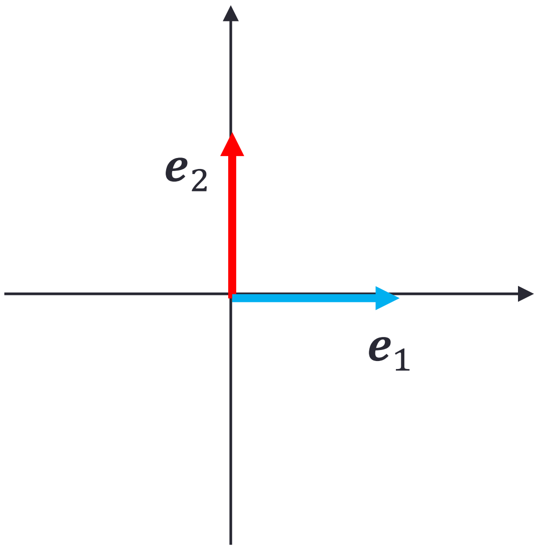


$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

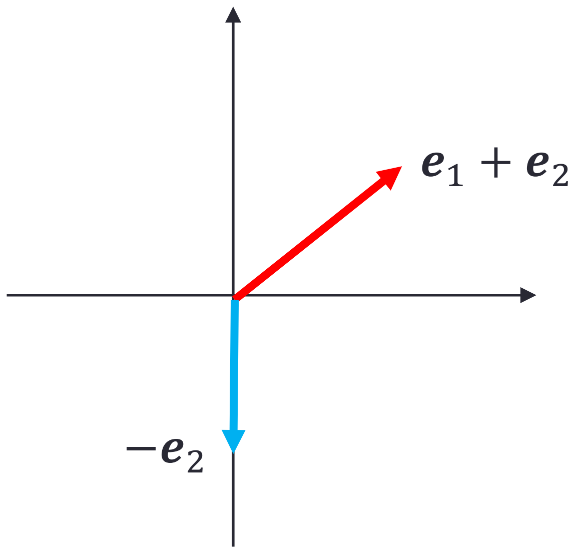


$$\xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}]{f_C}$$

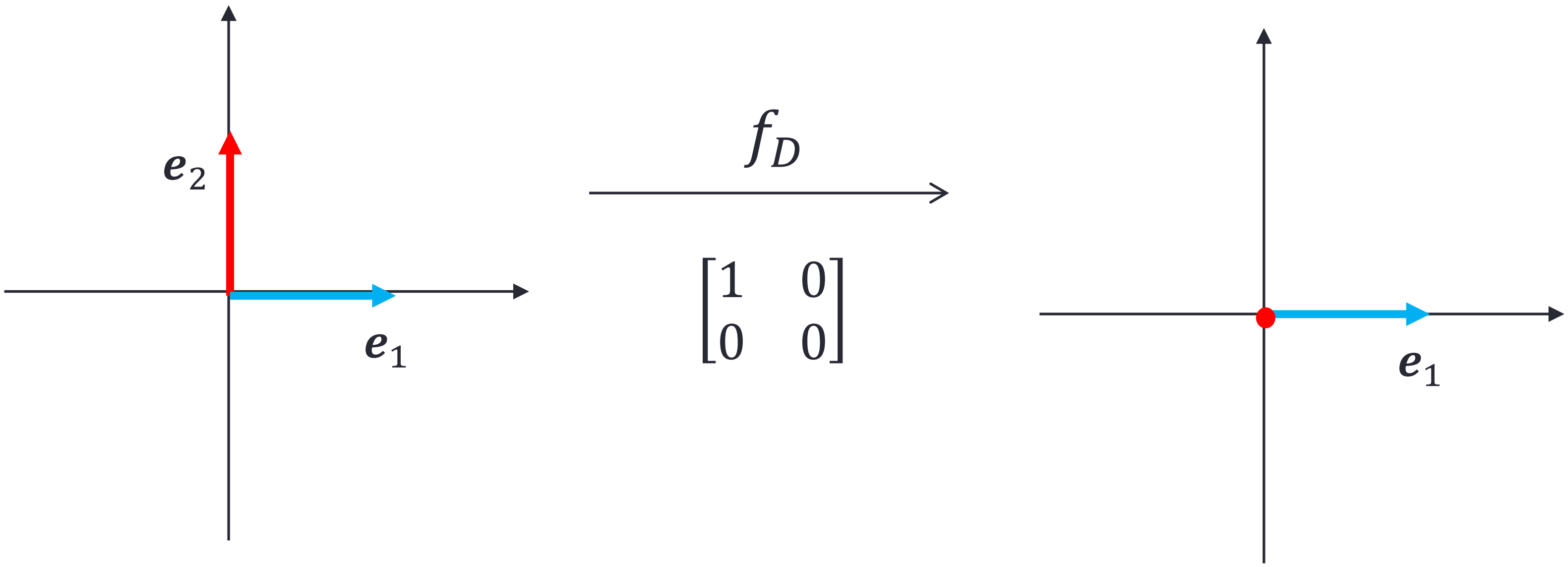




$$\xrightarrow[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}]{f_{C^{-1}}}$$

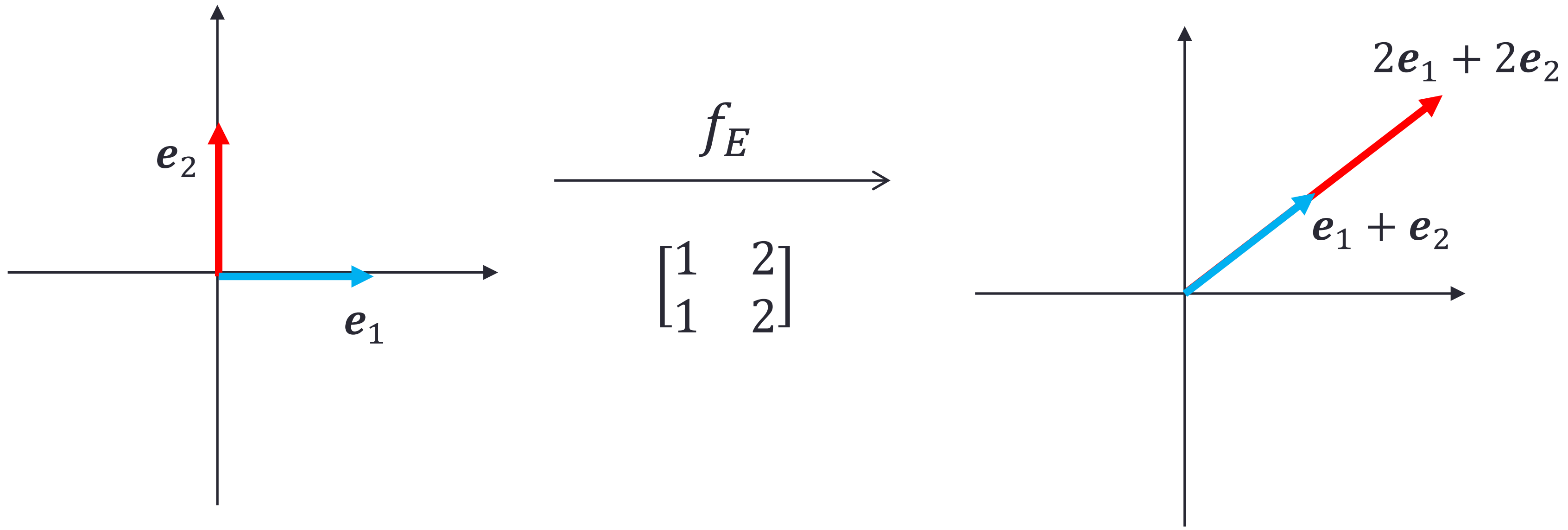


$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



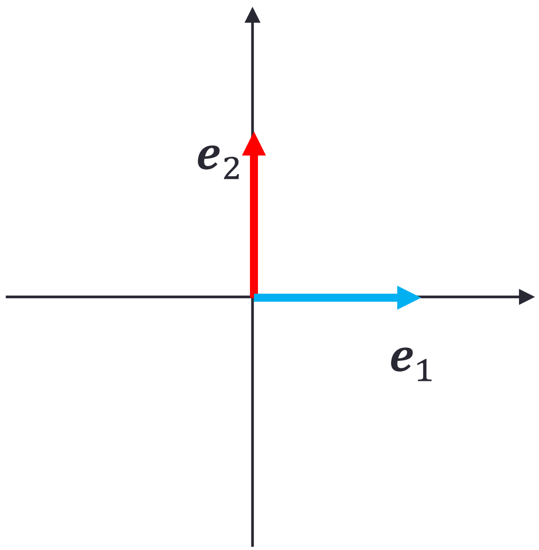
- 同型でない.
- $|D| = 0$

$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ f_E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

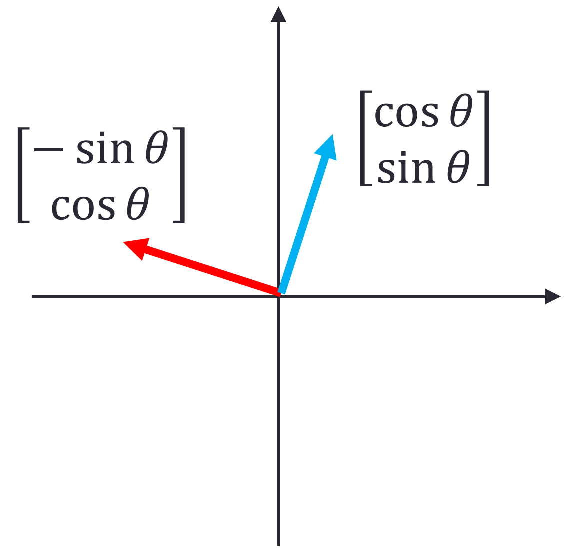


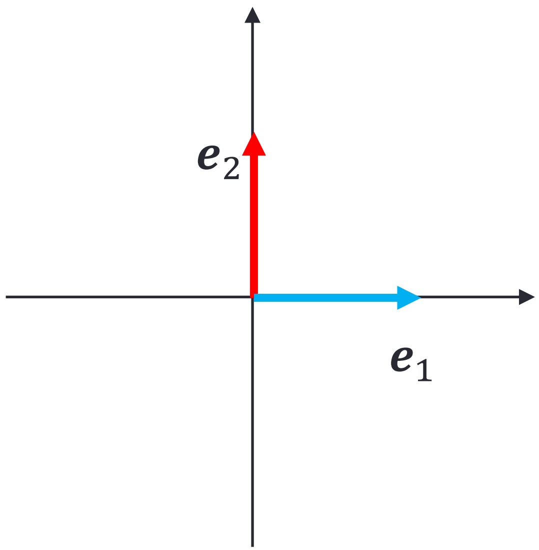
- 同型でない.
- $|E| = 0$

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad f_{A_\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

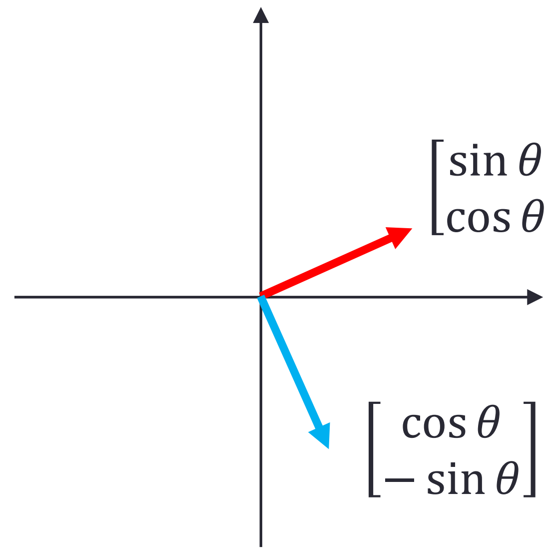


$$\xrightarrow[\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}]{f_{A_\theta}}$$





$$\xrightarrow[\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}]{f_{A_{-\theta}}}$$



まとめ

- 線形写像
  - 例（回転）
  - 線形性

- 線形写像の合成と行列の積
  - 同型写像と逆写像