# 線形代数
# 第5回「連立一次方程式（1）」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

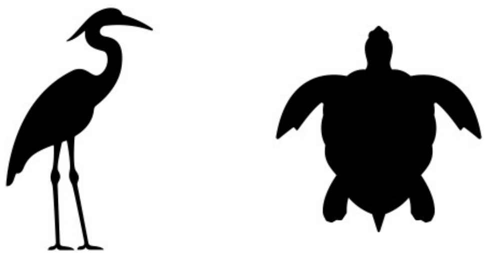
https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

# 今日の内容

- これまでは行列の幾何学的側面を説明してきた.
- 今回は行列の代数的側面を解説する.

1. 連立一次方程式，係数拡大行列
2. 行基本変形，掃き出し法
3. 階段行列，階数，簡約化

# 鶴亀算



- 鶴と亀が合わせて8匹，足の数が合わせて26本であるとき，何羽の鶴と何匹の亀がいるであろうか? ただし，鶴の足は2本，亀の足は4本であるとする.
- 鶴が $x$ 羽，亀が $y$ 匹いるとすると，条件から

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 4y = 26 \end{cases}$$

という連立方程式を立てることができる.

- これを解いて，$x = 3,\ y = 5$ であることが分かる.
- つまり上記の問題には解が一意的に存在する.

# 連立一次方程式

- 一般に，変数に関して高々1次の方程式の組を連立一次方程式という.
- 例えば

$$\begin{cases} 2x-3y+5z=1 \\ x+10y-7z=9 \\ -4x+y+8z=7 \end{cases}$$

は3変数 $x,y,z$ に関する3個の方程式からなる連立一次方程式である.

- 我々は与えられた連立方程式に解が存在するのか，もし存在するなら幾つ存在するのかに興味がある.
- 直感的には変数の数は自由度に，方程式の数は拘束条件に対応する.

# 連立一次方程式と線形代数

- 前の連立一次方程式は，ベクトルと行列を用いて

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 10 & -7 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

  と書くことができる.
- 一般に，$n$ 変数の $m$ 個の方程式からなる連立一次方程式は $m \times n$ 行列 $A$ と $m$ 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ , $n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ を用いて

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

  の形に書くことができる.
- この事実により，線形代数的な連立方程式の研究が可能になる.

# 連立一次方程式を解く

- 連立一次方程式を解くには様々な方法があるが，例えば次のように変形して解くことができる.

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 3x + 4y = -8 \end{cases} \xrightarrow{\text{第1式を } \frac{1}{2} \text{ 倍}} \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + 4y = -8 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{第2式に加える}]{\text{第1式を } -3 \text{ 倍を}} \begin{cases} x - y = 2 \\ 7y = -14 \end{cases} \xrightarrow{\text{第2式を } \frac{1}{7} \text{ 倍}} \begin{cases} x - y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{第2式第1式に加える}} \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

# 連立一次方程式の係数と定数項

- 連立一次方程式を解く場合に重要なことは，変数 $x, y$ ではなく，それらの係数と定数項だけを見れば十分なことである.
- 係数と定数項だけを取り出した行列

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -8 \end{array}\right]$$

を考える.

- ただし，係数と定数項を区別するために，行列を縦棒で区切ってある.

# 行列の変形

- 連立方程式の式の変形は，次の行列の変形に対応する.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{第1行を } \frac{1}{2} \text{ 倍}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{第2行に加える}]{\text{第1行を } -3 \text{ 倍を}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -14 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{第2行を } \frac{1}{7} \text{ 倍}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第2式第1行に加える}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

- 最後に単位行列が現れることが重要である.

# 拡大係数行列

- 変数の係数と定数項から作られる行列に連立一次方程式の情報はすべて含まれている.

定義5.1 (連立一次方程式の行列表示）

- $n$ 変数の $m$ 個の方程式からなる連立一次方程式は, $m \times n$ 行列 $A$ と $m$ 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{n}$ 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を用いて

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

の形に書くことができる.

- $A$ を係数行列, $\boldsymbol{x}$ を変数ベクトル, $\boldsymbol{b}$ を定数項ベクトルという.
- $m \times (n+1)$ 行列 $[A \mid \boldsymbol{b}]$ を拡大係数行列という.

# 例（拡大係数行列）

- 連立方程式

$$
\begin{aligned}
2x - 3y + 5z &= 1 \\
x + 10y - 7z &= 9 \\
-4x + y + 8z &= 7
\end{aligned}
$$

は，$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の形に

$$
\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 10 & -7 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}
$$

と書ける．

- 拡大係数行列は

$$
[A \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & -7 & 9 \\ -4 & 1 & 8 & 7 \end{array}\right]
$$

# 行基本変形

定義5.2

- 行列の**行基本変形**とは次の操作のいずれかの操作をいう.

1. ある行と別の行を入れ替える.
2. ある行を $c$ 倍する($c \neq 0$).
3. ある行の定数倍を別の行に加える.

注意

- 行基本変形とは，方程式の言葉で言えば，連立一次方程式を解く際に許される(情報が失われない)変形である.

# 解の一致

定理5.3

- 連立一次方程式の拡大係数行列 $[A \mid \boldsymbol{b}]$ に，行基本変形を繰り返して得られた行列を $[A' \mid \boldsymbol{b}']$ とする.
- このとき
  1. $[A \mid \boldsymbol{b}]$ に対応する連立一次方程式（元の連立一次方程式）の解
  2. $[A' \mid \boldsymbol{b}']$ に対応する連立一次方程式の解

  は一致する.

# 解の一致(例)

- 行基本変形

$$[A \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{第1行を}\ \frac{1}{2}\ \text{倍}} [A' \mid \boldsymbol{b}'] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -8 \end{array}\right]$$

は連立一次方程式の変形

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 3x + 4y = -8 \end{cases} \xrightarrow{\text{第1式を}\ \frac{1}{2}\ \text{倍}} \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + 4y = -8 \end{cases}$$

に対応する.

- これらは同値な連立一次方程式なので，解は一致する.

# 掃き出し法

- 定理5.2より，拡大係数行列 $[A \mid \boldsymbol{b}]$ に行基本変形を繰り返すことで得られた行列 $[A' \mid \boldsymbol{b}']$ の $A'$ を簡単な形にすることが望ましい.

定義5.4

- 行列に行基本変形を繰り返すことで簡単な形にすることを掃き出し法という.

- 「掃き出し法」という名前の由来は，$0$ でない係数を使って他の係数を掃き出すことにある.
- 例えば，$m = n$ かつ理想的な状況では，拡大係数行列 $[A \mid \boldsymbol{b}]$ は掃き出し法によって $[E_n \mid \boldsymbol{b}']$ の形になる.
- $[E_n \mid \boldsymbol{b}']$ は連立一次方程式が完全に解けた状態に対応する.

# 階段行列

定義5.5

- 行列 $A$ が**階段行列**であるとは，次が成立することである：

1. 零でない行が，零行よりも上に位置している．つまり，零行が存在するならば，それらは行列の最下部に配置される．
2. **主成分**（行の最も左にある零でない成分）が，その行の上にある行の主成分よりも真に右側に位置する．

- 上記の2つの条件から，ある列の主成分より下の成分は全て零である．

- この定義は分かりづらいので，具体例で見るのが良い．

# 階段行列（例）

- 対角行列や以下の行列は階段行列である.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- 以下の行列は階段行列ではない.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 10 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 11 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

# 階段行列への変換

定理5.6

- 任意の行列 $A$ は掃き出し法によって階段行列に変形することができる.
- 得られる階段行列は一意ではないが，零でない行ベクトルの個数は行基本変形の仕方に依存しない.

# 階段行列への変形

- 行列 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ を階段行列に変形する.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ 第1行と第2行を入れ替える

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 第2行の $-2$ 倍を第1行に加える

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 行列 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ は両方とも階段行列である.

# 階段行列への変形（演習）

演習5.7

- 次の行列を掃き出し法によって階段行列に変形せよ.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ (第1行の $-2$ 倍を第2行に加える)

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$ (第2行を $\frac{1}{16}$ 倍)

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

# 階数

定義5.8

- 行列 $A$ を掃き出し法によって階段行列に変形したとき，その階段行列の零でない行ベクトルの個数を $A$ の**階数**（ランク）という.
- $A$ の階数を $\operatorname{rank} A$ と書く.

- 直感的には，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = 0$ に含まれる「本質的な方程式の数」が行列 $A$ の階数である.
- $B$ が $A$ から行基本変形の繰り返しで得られる場合，$A$ も $B$ から行基本変形の繰り返しで得ることができる.
- これにより，$A$ と $B$ が行基本変形の繰り返しで関係している場合

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$$

# 階数（演習）

演習5.9

- 次の行列の階数を求めよ.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

# 階数

- 階段行列の零でない各行の主成分はすべて異なる列に属するので, $A$ の階数 $\operatorname{rank} A$ は掃き出し法によって得られる階段行列 $B$ の主成分を含む列の個数でもある.
- これにより次の定理が得られる.

定理5.10

- $A$ が $m \times n$ 行列であれば

$$\operatorname{rank} A \leq m, \qquad \operatorname{rank} A \leq n$$

# 簡約階段行列

定義5.11

- 階段行列 $A$ が**簡約**であるとは，すべての主成分が $1$ であり，その主成分を含む列の中で唯一つの零でない成分であること.

- 単位行列 $E_n$ や次の行列は簡約階段行列である.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 次の行列は簡約階段行列ではない.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 簡約化

定理5.12

- 任意の行列 $A$ は掃き出し法によって簡約階段行列に変形することができる.
- 得られる簡約階段行列は一意である.

定義5.13

- 行列 $A$ を掃き出し法によって簡約階段行列 $B$ を得ることを**簡約化する**という.
- 簡約階段行列 $B$ を $A$ の**簡約化**と呼ぶ.

# 簡約化(例)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 簡約化(演習)

演習5.14

- 次の行列を簡約化せよ.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ (第1行の $-2$ 倍を第2行に加える)

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$ (第2行を $\frac{1}{16}$ 倍)

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (第1行を $\frac{1}{2}$ 倍)

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (第2行の $\frac{3}{2}$ 倍を第1行に加える)

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

# まとめ

- 連立一次方程式
  - 拡大係数行列
- 行基本変形
  - 掃き出し法
- 階段行列
  - 階数
  - 簡約化