線形代数
第6回「連立一次方程式(2)」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

- 連立方程式の解の存在について議論する.
- 逆行列との関係，具体的な計算方法に関して開設する.

1. 解の存在（一意，不定，不能）

2. 掃き出し法による逆行列の計算

連立一次方程式

- 3変数 x, y, z に関する3個の方程式からなる連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ x + 10y - 7z = 9 \\ -4x + y + 8z = 7 \end{cases}$$

はベクトルと行列を用いて

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 10 & -7 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

と書くことができた.

係数行列・変数ベクトル・定数項ベクトル

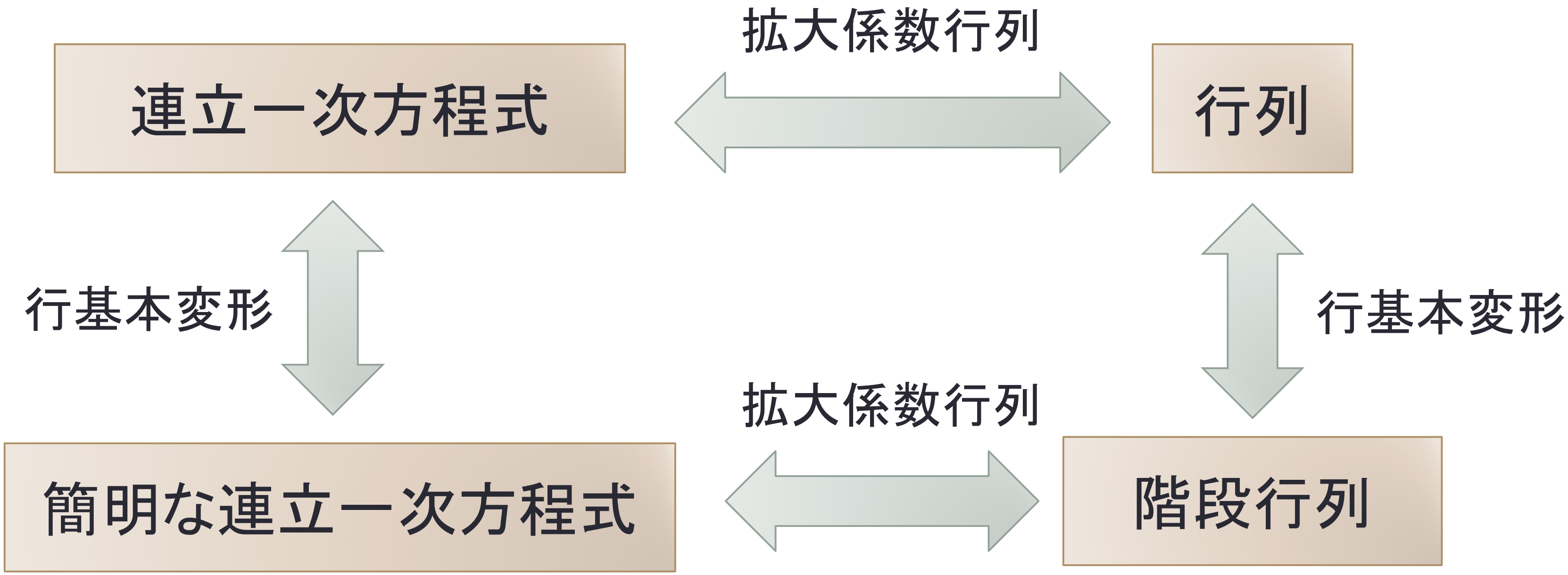
- 一般に, n 変数の m 個の方程式からなる連立一次方程式は $m \times n$ 行列 A と m 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$, n 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ を用いて

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

  の形に書くことができる.
- A を係数行列, $\boldsymbol{x}$ を変数ベクトル, $\boldsymbol{b}$ を定数項ベクトルという.
- $m \times (n+1)$ 行列 $[A \mid \boldsymbol{b}]$ を拡大係数行列という.
  - n は変数の数であるから自由度
  - m は一次方程式の数であるから拘束条件の数に対応している.

拡大係数行列と行基本変形

- 行列の行基本変形は，連立一次方程式の同値な変形に対応している.



解の存在(一意・不定・不能)

- 方程式の自由度と拘束条件の数が釣り合っている n 変数の n 個の連立一次方程式 $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の場合，解について次の3つの場合が考えられる:

1. 解が一意に存在する.

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

2. 解が存在するが，一意に定まらない(不定).

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$$

3. 解が存在しない(不能).

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 13 \end{cases}$$

解が一意に存在する場合

- 連立一次方程式

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

の拡大係数行列を掃き出し法で簡約階段行列に変形する.

$$[A \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] = [A' \mid \boldsymbol{b}']$$

解が一意に存在する場合

- 掃き出し法は，連立一次方程式を同値な連立方程式に変換する操作である.
- 得られた行列

$$[A' \mid \boldsymbol{b}'] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

は，連立一次方程式が解けた状態

$$\begin{cases} x \qquad\quad = 3 \\ \qquad\quad y = -1 \end{cases}$$

に対応する.

- 階数を計算すると，$\operatorname{rank} A' = 2$ かつ $\operatorname{rank}\,[A' \mid \boldsymbol{b}'] = 2$ である.

解が一意に定まらない（不定）場合

- 連立一次方程式

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$$

の拡大係数行列を掃き出し法で簡約階段行列に変形する.

$$[A \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A' \mid \boldsymbol{b}']$$

- 階数を計算すると, $\operatorname{rank} A' = 1$ かつ $\operatorname{rank}\,[A' \mid \boldsymbol{b}'] = 1$ である.
- 行列 $[A' \mid \boldsymbol{b}']$ の第2行は

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$$

に対応するので, 何も条件がない.

- 解は変数 t を用いて次のように表すことができる.

$$x = -2t + 4, \quad y = t$$

解が存在しない（不能）場合

- 連立一次方程式

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 13 \end{cases}$$

の拡大係数行列を掃き出し法で簡約階段行列に変形する.

$$[A \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 13 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [A' \mid \boldsymbol{b}']$$

- 階数を計算すると, $\operatorname{rank} A' = 1$ かつ $\operatorname{rank}\,[A' \mid \boldsymbol{b}'] = 2$ である.
- 行列 $[A' \mid \boldsymbol{b}']$ の第2行は

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$$

に対応する.

- 条件が矛盾しているため, 解は存在しない.

解の存在（一意・不定・不能）

定理6.1

- n 変数の n 個の方程式からなる連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に関して，次が成立する.

1. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\ [A \mid \boldsymbol{b}] = n$ であれば，解が一意に存在する.
2. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\ [A \mid \boldsymbol{b}] < n$ であれば，解は $n - \operatorname{rank} A$ 個の媒介変数で表現できる.（不定）
3. $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank}\ [A \mid \boldsymbol{b}]$ であれば，解は存在しない.（不能）

- 直感的には，それぞれ次のような意味を持つ：

1. 自由度と束縛条件の数が釣り合っている.
2. 無駄があり，自由度>束縛条件の数.
3. 矛盾が存在.

（非）斉次連立一次方程式

定義6.2

- 定数項ベクトルに関して
  - $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ である連立一次方程式を斉次,
  - $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ である連立一次方程式を非斉次

という.

- 斉次連立一次方程式 $A\,\boldsymbol{x} = 0$ に関して，常に

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\ [A \mid \boldsymbol{b}]$$

が成り立つので，必ず解が存在する.

- 実際，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は解であり，これは自明解と呼ばれる.
- 自明解でない解を非自明解という.
- $\operatorname{rank} A = n$ であれば，自明解が唯一の解である.

(非)自明解

- 連立方程式

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 10 & -7 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

は自明解 $\mathbf{0} = {}^t[0 \quad 0 \quad 0]$ を持ち，これが唯一の解である．

- 一方，連立方程式

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 10 & -7 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

は自明解 $\mathbf{0}$ だけでなく，非自明解 ${}^t[1 \quad 1 \quad -1]$ や ${}^t[2 \quad 2 \quad -2]$ を持つ．

逆行列

- n 変数の n 個の連立一次方程式

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に関して，もし係数行列 A の逆行列 A^{-1} が存在すると，
両辺に左から A^{-1} を掛けることで，

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\,\boldsymbol{b}$$

となり，連立一次方程式の解が求まる.

- このことから
  - 係数行列の逆行列を計算することは，連立一次方程式を解くことに対応する.
  - 定理6.1から，階数と逆行列の存在が関係していると予想される（後述）.

逆行列の公式

- 2次正方行列の逆行列に関する定理を思い出す.

定理6.3

- 2次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対し, A の行列式を

$$|A| = ad - bc$$

で定義する.

- A が正則であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$ である.
- このとき A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

で与えられる.

逆行列

例6.4

- 連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

を考える.

- 係数行列は正則であり，逆行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

であるから，解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

逆行列

- 逆行列の計算は連立一次方程式の解と関係していて，その計算は実用上重要である．
- 一般の大きさの正則行列の逆行列の表示も知られているが，かなり複雑である．
  - 余因子行列を用いた表示を後で説明する．
- 計算機に計算させるには問題ないが，人間が手計算するのは骨が折れる．
- 以下では，行基本変形を用いた，実用的な逆行列の計算方法を紹介する．

逆行列

- 次の定理6.5と定理6.6は基本的であるが，初めて学ぶ際にはその証明は完全に理解できなくても問題はない．

定理6.5

- n 次正方行列 A に対して，次は同値である．

1. $\mathrm{rank}\, A = n$
2. A の簡約化は単位行列 E_n
3. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が一意に存在
4. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{0}$ に限る
5. A は正則行列

定理6.5の証明（1）

$(1) \Rightarrow (2)$

- $\operatorname{rank} A = n$ であるから，A の簡約化は n 次正方かつすべての行が 0 でない．
- したがって，A の簡約化は単位行列 E_n に限る．

$(2) \Rightarrow (3)$

- $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $[A \mid \boldsymbol{b}]$ の簡約化は

$$[A \mid \boldsymbol{b}] \longrightarrow [E_n \mid \boldsymbol{b}']$$

となるので，$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解 $\boldsymbol{b}'$ を持ち，また解は一意である．

$(3) \Rightarrow (4)$

- (3) の特別な場合．自明解が唯一の解．

$(4) \Rightarrow (1)$

- 定理6.1から，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\ [A \mid \boldsymbol{0}] = n$.

定理6.5の証明(2)

(3) ⇒ (5)

- n 個の連立一次方程式

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1,\ \ A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2,\ \ \cdots,\ \ A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_n$$

の解を $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}^n$ として, n 次正方行列

$$C = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$$

を考える.

- このとき, 行列の積の定義より

$$\begin{aligned} A\,C &= A\,[c_1, c_2, \cdots, c_n] \\ &= [A\,c_1, A\,c_2, \cdots, A\,c_n] \\ &= [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n] \\ &= E_n \end{aligned}$$

- $C\,A = E_n$ を示すのは少し面倒なので省略.

定理6.5の証明(3)

$(5) \Rightarrow (3)$

- $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左から A^{-1} を掛けて

$$A^{-1}\,A\,\boldsymbol{x} = A^{-1}\,\boldsymbol{b}$$

すなわち

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\,\boldsymbol{b}$$

逆行列と掃き出し法

- 定理6.5にもとづき，逆行列を掃き出し法で求めることができる.

定理6.6
- 正則な n 次正方行列 A に対して，$n \times 2n$ 行列 $[A \mid E_n]$ を考える.
- $[A \mid E_n]$ の簡約化は $[E_n \mid B]$ の形になる.
- B は A の逆行列となる.

- 例えば，行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めるには

$$[A \mid E_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

の簡約化を考えればよい.
- 簡約化が $[E_n \mid B]$ の形でなければ，そもそも A は正則ではない.

定理6.6の証明

- 方程式 $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$ の解を $\boldsymbol{c}_i$ とすれば，拡大係数行列 $[A \mid \boldsymbol{e}_i]$ の簡約化は

$$[A \mid \boldsymbol{e}_i] \Longrightarrow [E_n \mid \boldsymbol{c}_i]$$

となる.

- 一方で，定理6.5の証明で示したように

$$A^{-1} = [\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_n]$$

である.

- 掃き出し法は列を保つので

$$[A \mid \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n] = [A \mid E_n]$$

の簡約化は

$$[E_n \mid \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_n] = [E_n \mid A^{-1}]$$

逆行列と掃き出し法（例）

例6.7

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ の逆行列を掃き出し法で求める.

$$[A \mid E_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] = [E_2 \mid A^{-1}]$$

逆行列と掃き出し法(例)

例6.8

- 行列 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$ の逆行列を掃き出し法で求める.

$$[A\mid E_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]=[E_3\mid A^{-1}]$$

逆行列と掃き出し法(問題)

問題6.9

- 次の正則行列の逆行列を掃き出し法を使って求めよ.
- また，実際に逆行列になっていることも確かめよ.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

逆行列と連立一次方程式（例）

例6.10

- 次の連立一次方程式の解を求めよ.
- ただし，解が一意的に存在することを知っているとする.

$$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ \quad 2y+z=3 \\ \quad x+3z=0 \end{cases}$$

1. 連立一次方程式を $A\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の形に書く.
2. 係数行列 A の逆行列を計算する.
3. 解 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\,\boldsymbol{b}$ を計算する.

逆行列と連立一次方程式(例)

- 係数行列 A の逆行列を計算する.

$$[A \mid E_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] = [E_3 \mid A^{-1}]$$

逆行列と連立一次方程式(例)

- 与えられた連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

まとめ

- 解の存在
  - 一意
  - 不定
  - 不能
- 掃き出し法による逆行列の計算