

論理学

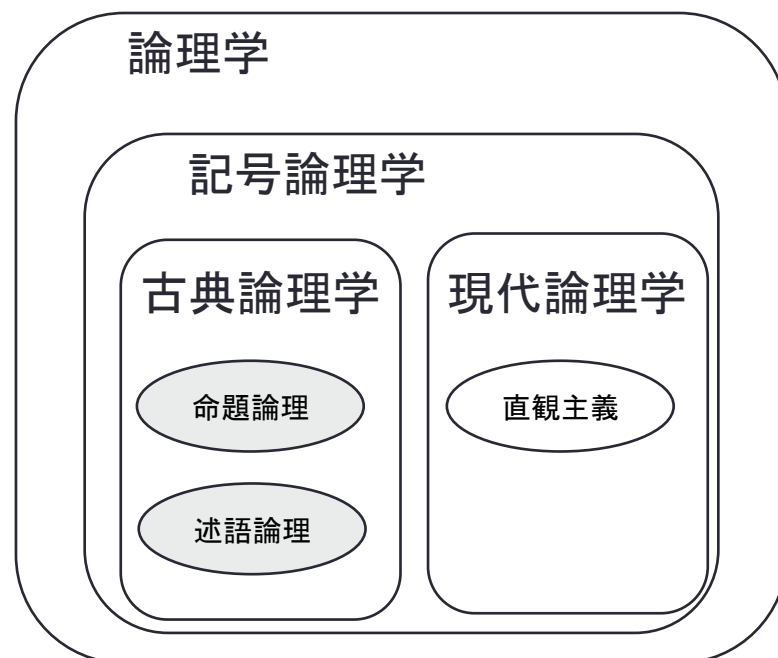
第1回「論理学とは」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

授業概要

- 正しい推論とは何か
 - 物事を考えるとき, いろいろな事実から推論して, 正しい内容を導き出す必要がある.
- 記号論理学(数理論理学)
 - 自然言語のままで扱ったのでは, 正しさの見通しが悪くなる.
 - 記号に置き換えることによって, 本質的な論理構造を明らかにする.
 - そのうえで正しい推論とは何かを理解する.
- 正しい vs 証明する
 - 正しいことを示すことが証明.
 - 正しいことはすべて証明できるのか?
- いろいろな論理学
 - 古典論理学
 - 命題論理
 - 述語論理
 - 現代論理学
 - 直観主義
 - 様相論理



授業予定

1. 論理学とは

2. 命題と真理値

3. 標準形

4. 証明

5. 健全性と完全性

6. ブール代数

7. 述語論理とは

8. 述語論理の論理式

9. 述語論理における証明

10. エルブラン定理と導出原理

11. PROLOG入門

12. 様相論理と時制論理

13. ペアノの自然数論

14. 直観主義論理

論理学とは

- 「論理的に話す」
 - 感情で話してはいけない.
 - 知らないことを想像で話してはいけない.
 - あいまいであってはいけない.
 - 事実や根拠に基づき話す.
 - 論証(推論)において飛躍を行なわない.
 - 正しいことがだれにでも明白に分かるようにする.
 - 矛盾した点がない.
- 論理学
 - 哲学から生まれた.
 - 数理論理学とそれ以外に分けられる.

数学における論理学の位置づけ

代数

線形代数

整数論

代数方程式

群 環 体

幾何

ユークリッド幾何

非ユークリッド幾何

位相幾何

解析

微分

積分

偏微分

連続

微分方程式

統計

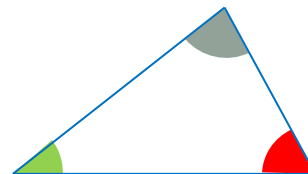
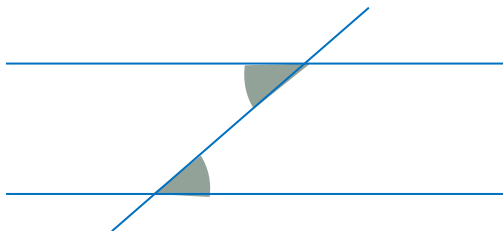
確率

集合論

論理学

証明の誕生

- ユークリッド原論
 - ユークリッド(紀元前3世紀)により編纂
- ユークリッド幾何学の公準
 1. 任意の一点から他の一点に対して直線を引くことができる.
 2. 有限の直線を連続的にまっすぐ延長することができる.
 3. 任意の中心と半径で円を描くことができる.
 4. すべての直角は互いに等しい.
 5. 直線が2直線と交わるとき, 同じ側の内角の和が2直角より小さい場合, その2直線が限りなく延長されたとき, 内角の和が2直角より小さい側で交わる.
- 証明
 - 平行線の2つ錯角は等しい
 - 三角形の内角の和は2直角である.



証明できますか？

- ピタゴラスの定理
 - 三平方の定理
- 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ である.
- $\sqrt{2}$ は無理数である.
- π は無理数である.
- n次方程式はn個の複素数解を持つ.
- 中間値の定理
 - $a < b$ に対して連続関数 f が $f(a) < f(b)$ を満たすとき, $[f(a), f(b)]$ 内の任意の点 h に対して $h = f(c)$ となる点 c が $[a, b]$ 内に存在する.

ことわざ

・「風が吹けば桶屋が儲かる」

1. 風が吹けばほこりが立つ.



2. ほこりが目に入って, 目の不自由は人が増える.



3. 目の不自由な人は, 職業のために三味線を買う.



4. 三味線を作るためにネコの皮が必要になり, ネコが殺される.



5. ネコが減ればネズミが増える.



6. ネズミが増えると桶をかじる.

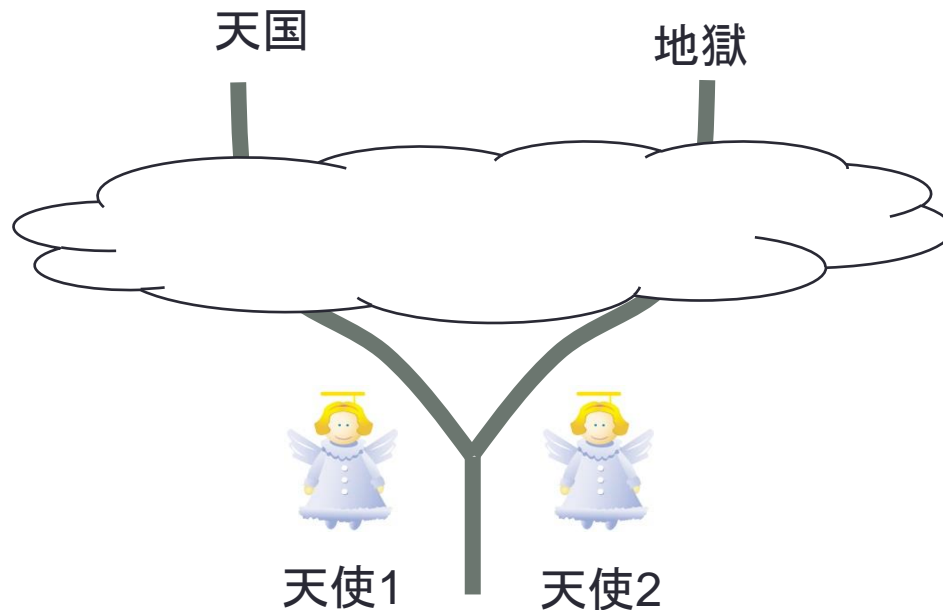


7. 桶が売れるので桶屋が儲かる.

論理パズル

- 論理学はパズルとして用いられることも多い.
- あるクレタ人は言った次の文はウソか本当か？
 - 「すべてのクレタ人はウソしか言わない」
- 絶対に外れない予言
 - 「この予言は外れるでしょう」という予言
- 絶対に解けない問題
 - 「この問題は解けない」という問題
- 床屋のパラドックス
 - ある村には床屋が一つだけある.
 - 床屋は自分のひげを剃らない人のひげを剃る.
 - 床屋は自分でひげを剃る人のひげは剃らない.
 - 床屋自身は自分のひげを剃るのか？

天国への道



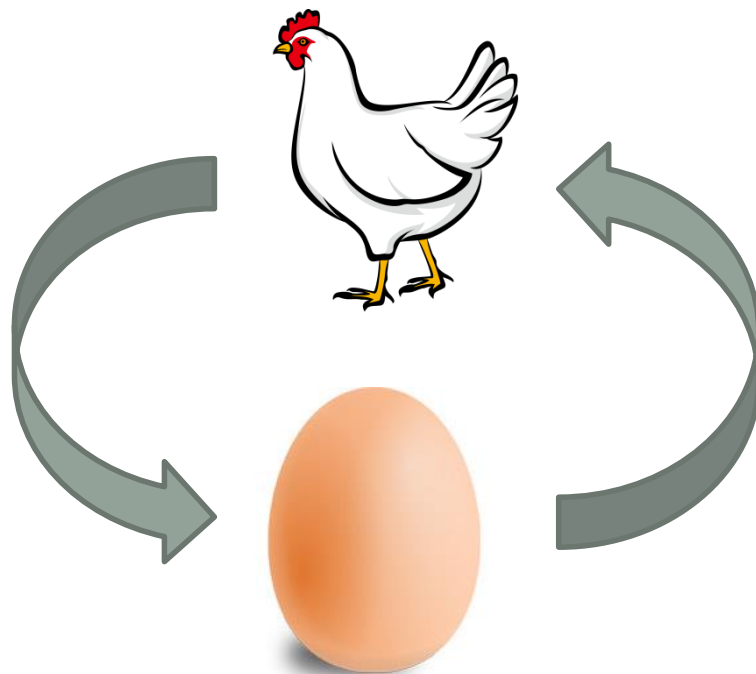
- 天国と地獄の分かれ道に天使が2人立っている
 - 一方の天使は絶対にホントのことを言い、もう一方の天使は絶対にウソのこと言う.
- しかし、どちらがどちらの天使か分からない.
- どちらか一方に、一つだけ質問することができる.
 - ただし、天使はイエスかノーでしか返事しない.
- どんな質問をすれば、正しく天国に行くことができるか？

集合論は大丈夫？

- 集合とはある条件にしたがうものを集めたもの
 - 例
 - 人間の集合H
 - 自然数の集合N
 - 今日考えた事象の集合P
 - 犬ではないものの集合D
- 集合の中には自分自身を含むものと、含まないものがある
 - 含まない：H, N
 - 含む：P, D
- ラッセルのパラドックス
 - 「自分自身を含まないものの集合」は集合か？

ニワトリか卵か？

- 水掛け論の代表例
- ニワトリが先か卵が先か？
 - ニワトリがいなければ卵はない。(ニワトリが卵を産む.)
 - 卵がなければニワトリは生まれない.



ルーレットで絶対に儲かる賭け方

- ルーレットには赤と黒の数字があり, 赤か黒か当てる賭け方ができる.
 - 当たれば賭けたお金の2倍がもらえる.
 - 負けると賭けたお金は没収される.
- 絶対に儲ける方法
 - 最初, 表に1万円を賭ける.
 - 当たれば2万円になるので1万円儲かる.
 - 外れると, 次に表に2万円を賭ける.
 - 当たれば4万円になるので, 最初の1万円の損と合わせても1万円儲かる.
 - また, 外れると, 次に表に4万円を賭ける.
 - 当たれば8万円になるので, トータルでやはり1万円儲かる.
 - このように外れると, 2倍にして次に賭ける.
 - いつか当たるので, 必ず1万円儲かることになる.
- これは本当か?
 - ルーレットでは, 0には色がついていないので, これも負けになるが, 外れた時に2倍より少し多く賭けることにすればよい.
 - 1/2, 1/2の賭けでなくても, 同様にできる.

多数決は大丈夫？

- あるミスコンテストで美女Aと美女Bが最終候補として残った。
- 最終審査は5人の審査員により3つの要素（性格美，肉体美，知性美）で投票する。
 - それぞれの審査員は3つの要素のそれぞれに対して美女AとBのどちらが優れているかを選ぶ。
 - 審査員は3つの要素の多数決で自分が推薦する候補者を決める。
 - 推薦者数の多い美女を優勝者とする。
- この結果，優勝者はBとなったが，調べてみるとそれぞれの要素においては，いずれもAの方が多くの支持を得ていることが分かった。こんなことはあるのか？

審査員	性格美	肉体美	知性美	推薦
J1				B
J2				B
J3				B
J4				A
J5				A
	A	A	A	優勝B

まとめ

- 論理学
 - 推論を扱う
- 記号論理学
 - 記号に置き換えることによって, 本質的な論理構造を明らかにする.
- 取り扱う論理学
 - 命題論理
 - 述語論理