

# 論理学

## 第1回「論理学とは」

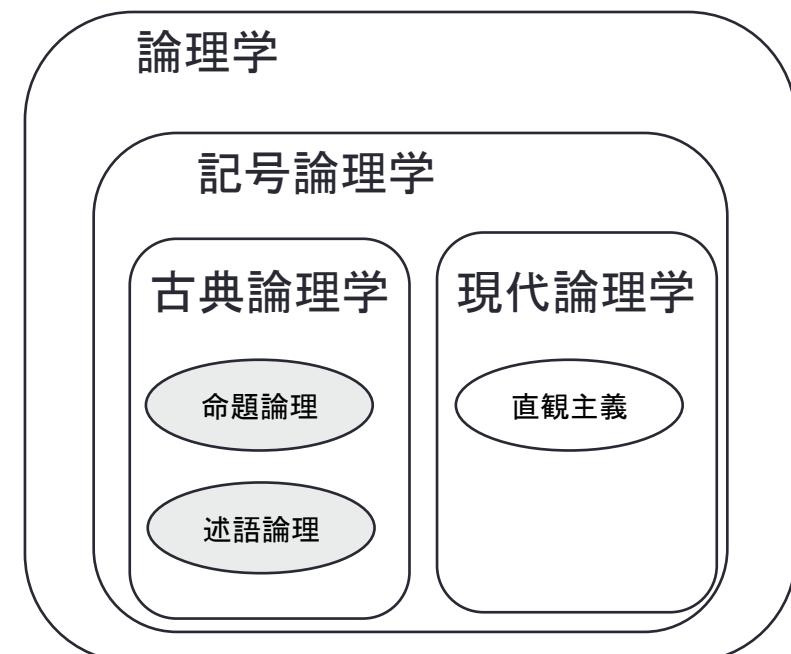
---

萩野 達也

[hagino@sfc.keio.ac.jp](mailto:hagino@sfc.keio.ac.jp)

# 授業概要

- 正しい推論とは何か
  - 物事を考えるとき、いろいろな事実から推論して、正しい内容を導き出す必要がある。
- 記号論理学(数理論理学)
  - 自然言語のままで扱ったのでは、正しさの見通しが悪くなる。
  - 記号に置き換えることによって、本質的な論理構造を明らかにする。
  - そのうえで正しい推論とは何かを理解する。
- 正しい vs 証明する
  - 正しいことを示すことが証明。
  - 正しいことはすべて証明できるのか？
- いろいろな論理学
  - 古典論理学
    - 命題論理
    - 述語論理
  - 現代論理学
    - 直観主義
    - 様相論理



# 授業予定

1. 論理学とは
2. 命題と真理値
3. 標準形
4. 証明
5. 健全性と完全性
6. ブール代数
7. 述語論理とは
8. 述語論理の論理式
9. 述語論理における証明
10. エルブラン定理と導出原理
11. PROLOG入門
12. 様相論理と時制論理
13. ペアノの自然数論
14. 直観主義論理

# 論理学とは

- ・「論理的に話す」
  - ・感情で話してはいけない.
  - ・知らないことを想像で話してはいけない.
  - ・あいまいであってはいけない.
  - ・事実や根拠に基づき話す.
  - ・論証(推論)において飛躍を行なわない.
  - ・正しいことがだれにでも明白に分かるようにする.
  - ・矛盾した点がない.
- ・論理学
  - ・哲学から生まれた.
  - ・数理論理学とそれ以外に分けられる.

# 数学における論理学の位置づけ

代数

線形代数

整数論

代数方程式

群 環 体

幾何

ユークリッド幾何

非ユークリッド幾何

位相幾何

解析

微分

積分

偏微分

連続

微分方程式

統計

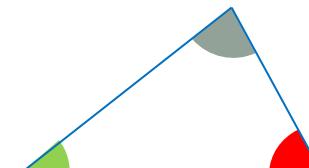
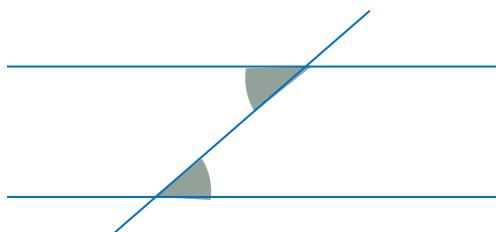
確率

集合論

論理学

# 証明の誕生

- ユークリッド原論
  - ユークリッド(紀元前3世紀)により編纂
- ユークリッド幾何学の公準
  1. 任意の一点から他の一点に対して直線を引くことができる.
  2. 有限の直線を連続的にまっすぐ延長することができる.
  3. 任意の中心と半径で円を描くことができる.
  4. すべての直角は互いに等しい.
  5. 直線が2直線と交わるとき, 同じ側の内角の和が2直角より小さい場合, その2直線が限りなく延長されたとき, 内角の和が2直角より小さい側で交わる.
- 証明
  - 平行線の2つ錯角は等しい
  - 三角形の内角の和は2直角である.



# 証明できますか？

- ピタゴラスの定理
  - 三平方の定理
- 2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  である.
- $\sqrt{2}$  は無理数である.
- $\pi$  は無理数である.
- $n$ 次方程式は  $n$  個の複素数解を持つ.
- 中間値の定理
  - $a < b$  に対して連続関数  $f$  が  $f(a) < f(b)$  を満たすとき,  $[f(a), f(b)]$  内の任意の点  $h$  に対して  $h = f(c)$  となる点  $c$  が  $[a, b]$  内に存在する.

# ことわざ

- ・「風が吹けば桶屋が儲かる」

1. 風が吹けばほこりが立つ.



2. ほこりが目に入って、目の不自由は人が増える.



3. 目の不自由な人は、職業のために三味線を買う.



4. 三味線を作るためにネコの皮が必要になり、ネコが殺される.



5. ネコが減ればネズミが増える.



6. ネズミが増えると桶をかじる.

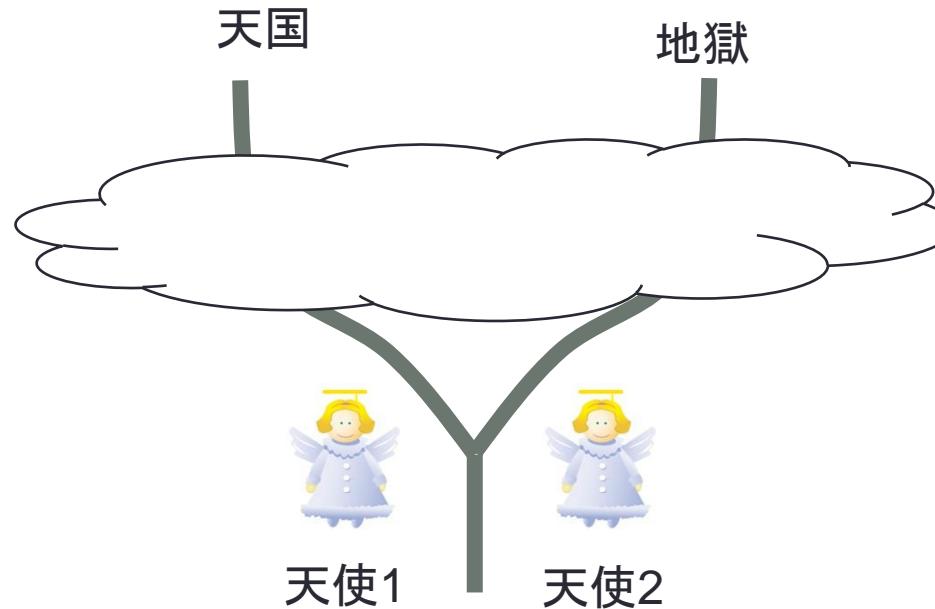


7. 桶が売れるので桶屋が儲かる.

# 論理パズル

- ・論理学はパズルとして用いられることが多い.
- ・あるクレタ人は言った次の文はウソか本当か?
  - ・「すべてのクレタ人はウソしか言わない」
- ・絶対に外れない予言
  - ・「この予言は外れるでしょう」という予言
- ・絶対に解けない問題
  - ・「この問題は解けない」という問題
- ・床屋のパラドックス
  - ・ある村には床屋が一つだけある.
  - ・床屋は自分のひげを剃らない人のひげを剃る.
  - ・床屋は自分でひげを剃る人のひげは剃らない.
  - ・床屋自身は自分のひげを剃るのか？

# 天国への道



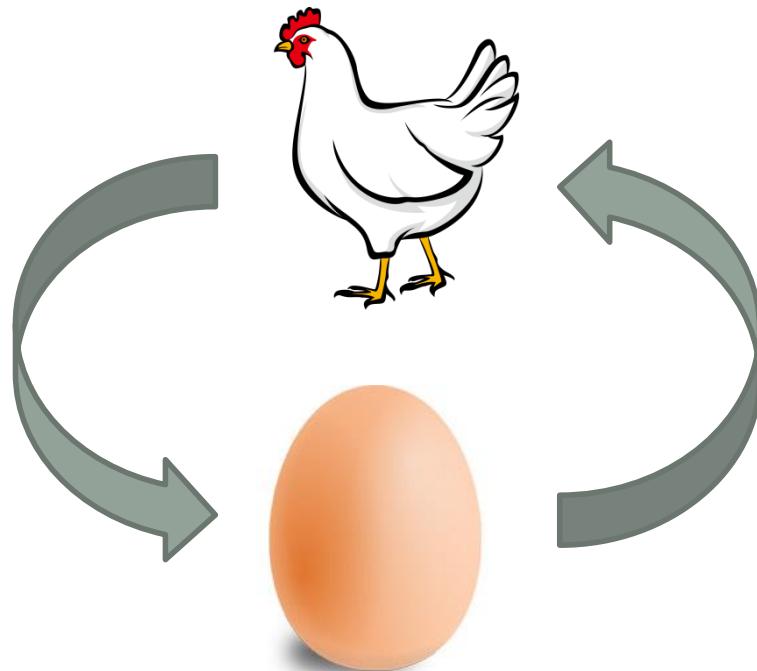
- 天国と地獄の分かれ道に天使が2人立っている
  - 一方の天使は絶対にホントのことを言い、もう一方の天使は絶対にウソのこと言う。
- しかし、どちらがどちらの天使か分からぬ。
- どちらか一方に、一つだけ質問することができる。
  - ただし、天使はイエスかノーでしか返事しない。
- どんな質問をすれば、正しく天国に行くことができるか？

# 集合論は大丈夫？

- ・集合とはある条件にしたがうものを集めたもの
  - ・例
    - ・人間の集合H
    - ・自然数の集合N
    - ・今日考えた事象の集合P
    - ・犬ではないものの集合D
- ・集合の中には自分自身を含むものと、含まないものがある
  - ・含まない：H, N
  - ・含む：P, D
- ・ラッセルのパラドックス
  - ・「自分自身を含まないものの集合」は集合か？

# ニワトリか卵か？

- 水掛け論の代表例
- ニワトリが先か卵が先か？
  - ニワトリがいなければ卵はない。（ニワトリが卵を産む。）
  - 卵がなければニワトリは生まれない。



# ルーレットで絶対に儲かる賭け方

- ルーレットには赤と黒の数字があり、赤か黒か当てる賭け方ができる。
  - 当たれば賭けたお金の2倍がもらえる。
  - 負けると賭けたお金は没収される。
- 絶対に儲ける方法
  - 最初、表に1万円を賭ける。
    - 当たれば2万円になるので1万円儲かる。
  - 外れると、次に表に2万円を賭ける。
    - 当たれば4万円になるので、最初の1万円の損と合わせても1万円儲かる。
  - また、外れると、次に表に4万円を賭ける。
    - 当たれば8万円になるので、トータルでやはり1万円儲かる。
  - このように外れると、2倍にして次に賭ける。
    - いつか当たるので、必ず1万円儲かることになる。
- これは本当か？
  - ルーレットでは、0には色がついていないので、これも負けになるが、外れた時に2倍より少し多く賭けることにすればよい。
  - 1/2, 1/2の賭けでなくとも、同様にできる。

# 多数決は大丈夫？

- あるミスコンテストで美女Aと美女Bが最終候補として残った。
- 最終審査は5人の審査員により3つの要素(性格美, 肉体美, 知性美)で投票する。
  - それぞれの審査員は3つの要素のそれぞれに対して美女AとBのどちらが優れているかを選ぶ。
  - 審査員は3つの要素の多数決で自分が推薦する候補者を決める。
  - 推薦者数の多い美女を優勝者とする。
- この結果、優勝者はBとなつたが、調べてみるとそれぞれの要素においては、いずれもAの方が多くの支持を得ていることが分かつた。こんなことはあるのか？

審査員	性格美	肉体美	知性美	推薦
J1				B
J2				B
J3				B
J4				A
J5				A
	A	A	A	優勝B

# まとめ

- 論理学
  - 推論を扱う
- 記号論理学
  - 記号に置き換えることによって、本質的な論理構造を明らかにする。
- 取り扱う論理学
  - 命題論理
  - 述語論理