論理学
第4回「証明」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/logic/login.php

前回まで

- 命題
  - 真偽が決まっている文
  - 命題変数
  - 論理結合子（∧，∨，→，￢）
  - 論理式
  - 真理値表
  - トートロジー
- 標準形
  - 論理和標準形
  - 論理積標準形
  - 論理結合子の制限

推論

- 真理値表を用いた命題の正しさの定義
  - 基本的な命題（命題変数）の真偽値から，命題の真偽を計算する.

- 推論
  - すでに正しいと分かっている命題から，別の正しい命題を導く
  - 推論規則を繰り返し用いて，前提となる命題から，命題導く
  - 「前提$B_1, . . . , B_n$からAが推論される」

- 推論規則（inference rule）
  - 正しい命題から正しい命題を導く規則

- 例
  - A と$A \rightarrow B$ からB を導く
  - モーダスポネンス（modus ponens）
  - 三段論法（syllogism）とも呼ばれる
  - 「人間は死すべきもの」であり「ソクラテスは人間である」，ゆえに「ソクラテスは死すべきもの」である.

公理と定理

- 公理(axiom)
  - 正しいと考える前提
  - 「異なった2点を通る直線はただ一つ存在する」
  - 「平行線は交わらない」

- 定理(theorem)
  - 公理から推論規則を使って得られた命題
  - 定理を導く推論の過程を証明(proof)という
  - 「3 角形の内角の和は180 度である」
  - 「ピタゴラスの定理」

形式論理体系

- 扱っている論理学を形式的に扱う体系
  - 論理式の構文や操作に関する体系
  - 公理と推論規則からなる

- 古典命題論理（classical propositional logic）の形式体系
  - ヒルベルト（Hilbert）の体系
    - 公理中心で推論規則はモーダスポネンスだけ
  - ゲンツェン（Gentzen）の自然演繹（natural deduction）の体系
    - 日常の推論に近いもの
    - NK体系
  - ゲンツェンのsequent計算の体系
    - 形式的な表現にすぐれている
    - LK体系

LKの式

- LK 体系では次の式(sequent)を用いる

$$A_1, \ldots, A_m \vdash B_1, \ldots, B_n$$

- 意味
  - 「A_1からA_mを仮定すると，B_1からB_nのどれかが導かれる」
- mやnは0でもかまわない
  - $\vdash B_1, \ldots, B_n$
    - 仮定は必要なく「B_1からB_nのどれかが導かれる」
  - $\vdash B$
    - 「Bが導かれる」
  - $A_1, \ldots, A_m \vdash$
    - 導かれるものがないので，「A_1からA_mを仮定すると矛盾する」
    - 「A_1からA_mのすべてを仮定してはいけない」
  - $A \vdash$
    - 「Aから導かれるものはない」
    - 「Aではない」
  - $\vdash$
    - 仮定は必要がないのに，導くものがない
    - 「矛盾している」

LKの公理と推論規則

- 公理：始式（initial sequent）

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\mathrm{I})$$

- 構造に関する推論規則：weakening, contraction, exchange, cut

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{WL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\mathrm{WR})$$

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{CL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\mathrm{CR})$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\mathrm{EL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ (\mathrm{ER})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\mathrm{Cut})$$

（ここでΓ, Δは論理式の列）

推論規則（つづき）

- 論理結合子に関する推論規則

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \land B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\land L_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \lor B}\ (\lor R_1)$$

$$\frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \land B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\land L_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \lor B}\ (\lor R_2)$$

$$\frac{A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \lor B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\lor L) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \land B}\ (\land R)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \to B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\to L) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B}\ (\to R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\neg L) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ (\neg R)$$

LKの証明図

- LK の**証明図**（proof figure）
  - 始式から出発し，推論規則を次々に適用していく過程を記述したもの
  - 証明図の一番下にある式を，その証明図の**終式**（end sequent）という.

- 例: 証明図

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\mathrm{I})}{\vdash A, \neg A}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash A, A \vee \neg A}\,(\vee\mathrm{R}_2)}{\vdash A \vee \neg A, A}\,(\mathrm{ER})}{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A}\,(\vee\mathrm{R}_1)}{\vdash A \vee \neg A}\,(\mathrm{CR})
$$

終式

- S を終式とする証明図が存在する時，S はLKで**証明可能である**（provable）という.

推論の拡張

- 式の左端右端以外への推論規則の適用
  - exchange規則を使うことで，適用させたい式を左端あるいは右端に移動させることができる.
  - どの位置の論理式に対しても，contraction, weakening, 論理結合に関する推論規則を適用することができる.

- 補題(lemma)
  - $S_1, S_2, \ldots, S_n$ からLKの推論規則を使ってSを推論することができるとき，下記は補題としてLKの証明において用いることができる.

$$\frac{S_1 \quad S_2 \quad \ldots \quad S_n}{S}$$

- 補題の例

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}{\Gamma \vdash \Delta, A, B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}{\Gamma \vdash \Delta, B \vee A}$$

式の構文的な意味

定理:次の3つは同値である.

1. 式$A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$がLKで証明可能である.
2. 式$A_1 \land \cdots \land A_m \vdash B_1 \lor \cdots \lor B_n$がLKで証明可能である.
3. 論理式$A_1 \land \cdots \land A_m \to B_1 \lor \cdots \lor B_n$がLKで証明可能である.

証明:

1⇒2

$$\dfrac{\dfrac{A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n}{A_1, \dots, A_m \vdash B_1 \lor \cdots \lor B_n}\ (\lor\mathrm{R,CR})}{A_1 \land \cdots \land A_m \vdash B_1 \lor \cdots \lor B_n}\ (\land\mathrm{L,CL})$$

2⇒3

$$\dfrac{A_1 \land \cdots \land A_m \vdash B_1 \lor \cdots \lor B_n}{\vdash A_1 \land \cdots \land A_m \to B_{11} \lor \cdots \lor B_n}\ (\to\mathrm{R})$$

3⇒1

$$\dfrac{\vdash A_1 \land \cdots \land A_m \to B_1 \lor \cdots \lor B_n \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A_1}\ (\mathrm{I})}{A_1, \dots, A_m \vdash A_1}\ (\mathrm{WL}) \quad \cdots}{A_1, \dots, A_m \vdash A_1 \land \cdots \land A_m}\ (\land\mathrm{R}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B_1 \vdash B_1}\ (\mathrm{I})}{B_1 \vdash B_1, \dots, B_n}\ (\mathrm{WR}) \quad \cdots}{B_1 \lor \cdots \lor B_n \vdash B_1, \dots, B_n}\ (\lor\mathrm{L})}{A_1 \land \cdots \land A_m \to B_1 \lor \cdots \lor B_n, A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n}\ (\to\mathrm{L})}{A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n}\ (\mathrm{Cut})$$

練習問題（1）

- $\neg(A \land \neg B) \vdash A \to B$の証明図を書きなさい.

$$\frac{}{\neg(A \land \neg B) \vdash A \to B}$$

練習問題(2)

- $A \to B, A \to \neg B \vdash \neg A$の証明図を書きなさい.

$$\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{A \to B, A \to \neg B \vdash \neg A}$$

練習問題(3)

- $A \to B \vdash \neg(A \land \neg B)$の証明図を書きなさい.

$$\frac{}{A \to B \vdash \neg(A \land \neg B)}$$

練習問題(4)

- $A \vdash \neg\neg A$の証明図を書きなさい.

$$\frac{}{A \vdash \neg\neg A}$$

練習問題(5)

- $\neg\neg A \vdash A$の証明図を書きなさい.

$$\frac{}{\neg\neg A \vdash A}$$

まとめ

- 推論
  - 公理
  - 定理

- LK体系
  - 始式
  - LK推論規則

- 証明
  - 証明図