

論理学

第5回「健全性と完全性」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/logic/>

前回まで

- 命題
 - 論理結合子 (\wedge , \vee , \rightarrow , \neg)
 - 真理値表
 - トートロジー
- 標準形
 - 論理和標準形
 - 論理積標準形
 - 論理結合子の制限
- 証明
 - 公理と定理
 - LK体系

式 (sequent) に関するトートロジー

- 論理式のトートロジーを式 (sequent) に拡張する.
- Γ を論理式の列 A_1, \dots, A_m としたとき,

$$\Gamma^* = \begin{cases} A_1 \vee \dots \vee A_m & m > 0 \text{ のとき} \\ \perp & m = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\Gamma_* = \begin{cases} A_1 \wedge \dots \wedge A_m & m > 0 \text{ のとき} \\ \top & m = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

- 式 $\Gamma \vdash \Delta$ がトートロジーである $\Leftrightarrow \Gamma_* \rightarrow \Delta^*$ がトートロジーである

健全性と完全性

- $\Gamma \vdash \Delta$ がトートロジーである
 - どんな付値 v のたいしても $v(\Gamma_* \rightarrow \Delta^*) = T$
 - 命題変数にどのような真偽地を与えても $\Gamma_* \rightarrow \Delta^*$ の真偽値が真となることを真理値表で計算して確かめることができる.
- $\Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能である.
 - $\Gamma \vdash \Delta$ が終式である証明図が存在する.
 - 始式から始めて $\Gamma \vdash \Delta$ が終式であるLKの証明図を構成する.
- **健全性** (soundness)
 - LKで証明可能な式はすべてトートロジーである.
- **完全性** (completeness)
 - トートロジーである式はすべてLKで証明可能である.

健全性の証明

定理: 任意の式 $\Gamma \vdash \Delta$ に対して, $\Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能であれば, $\Gamma \vdash \Delta$ はトートロジーである.

証明: 次の2つを示せばよい.

1. 任意の始式はトートロジーである.
2. 推論規則において, 上の式がすべてトートロジーであれば, 下の式もトートロジーである.

1.については, 始式 $A \vdash A$ は $A \rightarrow A$ がトートロジーであることから, トートロジーである.

2.については, それぞれの推論規則について確かめる必要がある. たとえば,

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} (\rightarrow L)$$

の場合, $\Gamma_{1*} \rightarrow \Delta_1^* \vee A$ と $B \wedge \Gamma_{2*} \rightarrow \Delta_2^*$ がトートロジーの時に, $((A \rightarrow B) \wedge \Gamma_{1*} \wedge \Gamma_{2*}) \rightarrow (\Delta_1^* \vee \Delta_2^*)$ がトートロジーになることを示せばよい.

つづき

• 付値 v に対して, $v((A \rightarrow B) \wedge \Gamma_{1*} \wedge \Gamma_{2*}) = T$ とすると, $v(A \rightarrow B) = T$, $v(\Gamma_{1*}) = T$, $v(\Gamma_{2*}) = T$ である.

1. $v(A) = F$ とすると $v(\Gamma_{1*} \rightarrow \Delta_1^* \vee A) = T$ と $v(\Gamma_{1*}) = T$ から, $v(\Delta_1^*) = T$ でなくてはならないことが分かる.

2. $v(A) = T$ とすると $v(A \rightarrow B) = T$ より $v(B) = T$ であり, $v(B \wedge \Gamma_{2*} \rightarrow \Delta_2^*) = T$ と $v(\Gamma_{2*}) = T$ であることから, $v(\Delta_2^*) = T$ でなくてはならないことが分かる.

いずれの場合であっても, $v(\Delta_1^* \vee \Delta_2^*) = T$ となり, $((A \rightarrow B) \wedge \Gamma_{1*} \wedge \Gamma_{2*}) \rightarrow (\Delta_1^* \vee \Delta_2^*)$ がトートロジーであることが分かる.

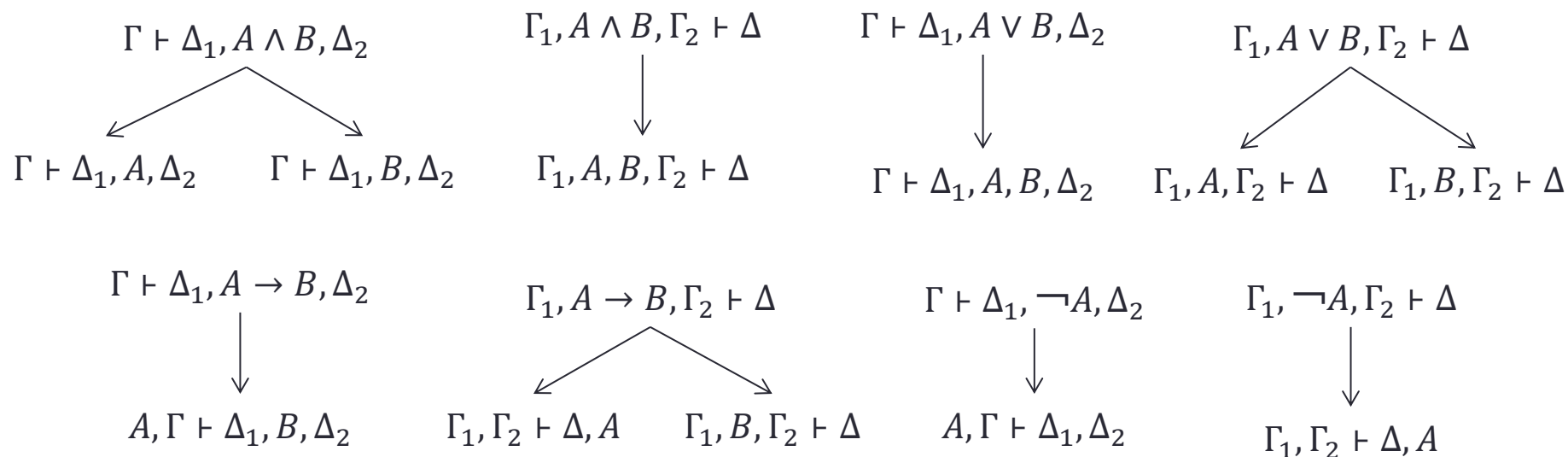
他の規則についても, 同じように, 上の式がトートロジーであることを仮定すると, 下の式もトートロジーでなくてはならないことが分かる.

以上によりLK体系は健全であることが分かる. QED

完全性の証明

定理: 任意の式 $\Gamma \vdash \Delta$ に対して, $\Gamma \vdash \Delta$ がトートロジーであれば, $\Gamma \vdash \Delta$ はLKでcutを用いずに証明可能である.

証明: まず, 式の**分解**を次のように定義する.



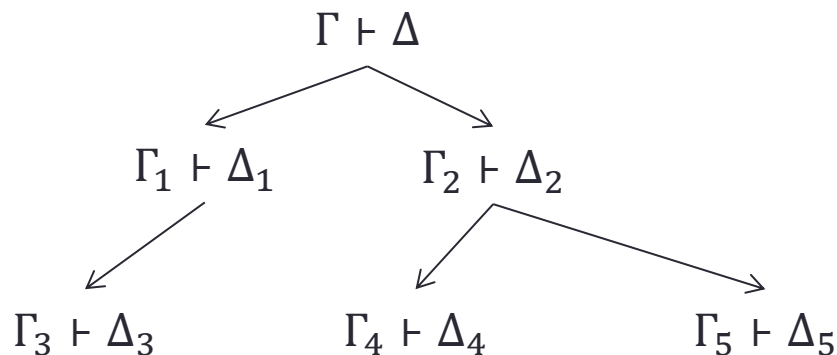
式を分解すると, 1つあるいは2つの式が得られる.

分解については次の2つが成り立つ.

- 分解された式の論理結合子の数は, もとの式の論理結合子の数より必ず少ない.
- もとの論理式がトートロジーであれば, 分解した式もトートロジーである.

つづき

与えられた式に分解を繰り返し適用する.



一番下には, 論理結合子を含まない, 命題変数ばかりの式になる.

- これを完全分解木という.
- $\Gamma \vdash \Delta$ がトートロジーの時には, 完全分解木の一番下の式は, 命題変数だけを含むトートロジーになる.

命題変数だけを含む式 $p_1, \dots, p_m \vdash q_1, \dots, q_n$ がトートロジーである必要十分条件は, p_i のどれかが q_j のどれかと一致することである.

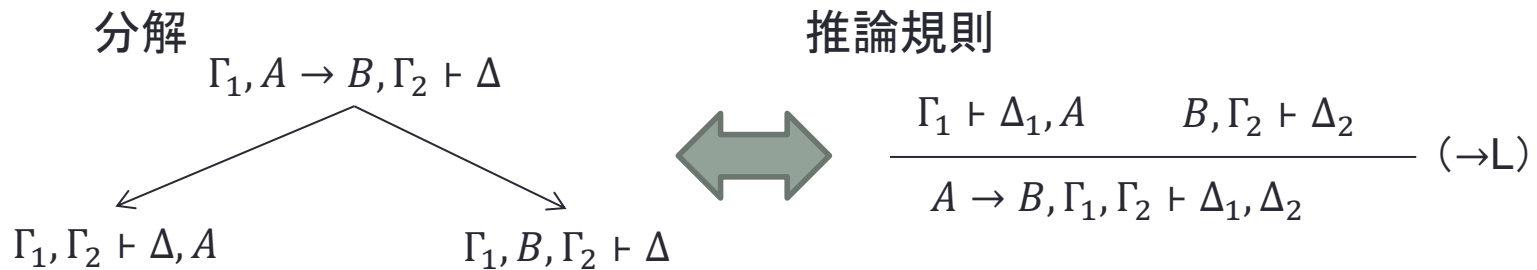
$\Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, A, \Delta_2$ はcutなく証明可能である.

- 始式 $A \vdash A$ にweakeningとexchangeの規則を用いればよい.

つづき

$\Gamma \vdash \Delta$ を分解して、 $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ と $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$ になったとき、 $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ と $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$ が cut なしで証明可能であれば、 $\Gamma \vdash \Delta$ も cut なしで紹介可能である。

- それぞれの分解に関して、対応する論理結合子の推論規則と exchange, contraction の規則を用いればよい。



よって、式がトートロジーであれば、完全分解木の終端の式はすべて命題変数だけからなるトートロジーであり、cut なしで証明可能である。分解を逆にたどることで、もとの式が cut なしで証明可能なことが分かる。

- 逆に式がトートロジーでない時には、どのように分解しても終端にトートロジーでない式があらわれる。

以上により、LK が完全であることが分かる。QED

証明の過程から、LK では証明可能かどうかを調べる有限の手続きが存在することが分かる。

例

- $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ の完全分解木を求め, この式のcutなしの証明図を求めよ.

分解

$\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$



証明

$\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

cut除去定理

定理: 式 $\Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能であれば, $\Gamma \vdash \Delta$ に至るLKの証明図でcutがないものが存在する.

証明: 証明可能な式はトートロジーであり, トートロジーはcutなしで証明可能である. QED

cutあり証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A}}{\vdash A, A \vee \neg A}}{\vdash A \vee \neg A, A}}{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A}}{\vdash A \vee \neg A} \\
 \frac{\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{B, A \vdash A}}{A \vdash B \rightarrow A}}{A \vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash}}{A, \neg A \vdash}}{A, \neg A \vdash B}}{\neg A \vdash A \rightarrow B}}{\neg A \vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)}}{A \vee \neg A \vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)} \\
 \hline
 \vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)
 \end{array}$$

定理: 式 $\Gamma \vdash \Delta$ のcutなしの証明図に現れる論理式はすべて $\Gamma \vdash \Delta$ の部分論理式である.

練習問題

- $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ のcutなしの証明図を求めなさい.

双対性

- 推論規則の双対性

- $(\neg L)$ と $(\neg R)$ は $\Gamma \vdash \Delta$ の左右を入れ替えたものになっている.
- \vee と \wedge の推論規則は左右を入れ替え \vee と \wedge を入れ替えると同じものである.

双対定理: A と B を \rightarrow を含まない論理式としたとき, A および B の \wedge を \vee に, \vee を \wedge に置き換えた論理式を \tilde{A} と \tilde{B} とすると, $A \vdash B$ が証明可能であれば, $\tilde{B} \vdash \tilde{A}$ も証明可能である.

まとめ

- LK体系の健全性
 - LK体系で証明できるものはすべてトートロジーである.
- LK体系の完全性
 - トートロジーはすべてLK体系で証明可能である.
 - 論理式が証明可能であるかどうかを調べる有限の手続きが存在する.
- LK体系の性質
 - cut除去定理
 - 双対定理