

論理学

第6回「他の論理体系」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/logic/>

前回まで

- 命題
 - 論理結合子 (\wedge , \vee , \rightarrow , \neg)
 - 真理値表
 - トートロジー
- 標準形
 - 論理和標準形
 - 論理積標準形
 - 論理結合子の制限
- 証明
 - 公理と定理
 - LK体系
- 健全性と完全性
 - LK体系は健全かつ完全である

LK体系

- 式 (sequent) を用いる.

$$A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$$

- 意味: A_1, \dots, A_m のすべてを仮定したとき, B_1, \dots, B_n のどれかを導くことができる.
- 公理は始式 (initial sequent) と定数 (\top と \perp) に関するものだけ.

$$\frac{}{A \vdash A} \text{ (I)}$$

$$\frac{}{\vdash \top} \text{ (}\top\text{)}$$

$$\frac{}{\perp \vdash} \text{ (}\perp\text{)}$$

- 推論規則は2種類に分けられる.
 - 構造に関する推論規則
 - 論理結合子に関する推論規則

LK推論規則

$$\frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \quad \frac{}{\vdash \top} \text{ (T)} \quad \frac{}{\perp \vdash} \text{ (}\perp\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (WL)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (WR)} \quad \frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (CL)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (CR)}$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta} \text{ (EL)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2} \text{ (ER)} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (Cut)}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (}\wedge\text{L}_1\text{)} \quad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (}\wedge\text{L}_2\text{)} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B} \text{ (}\wedge\text{R)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \text{ (}\vee\text{R}_1\text{)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \text{ (}\vee\text{R}_2\text{)} \quad \frac{A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (}\vee\text{L)}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (}\rightarrow\text{L)} \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B} \text{ (}\rightarrow\text{R)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (}\neg\text{L)} \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \text{ (}\neg\text{R)}$$

自然演繹体系

- 自然演繹体系 (natural deduction)
 - **NK体系**と呼ばれる
 - LK体系と同じくゲンツェンによって作られた
 - LK体系は厳密でよいが, 少し厳密すぎる
 - より日常の推論に近い推論体系
 - 構造に関する推論規則は存在しない
 - 論理結合子に関する推論規則のみ
 - それぞれの論理結合子に2種類の推論規則
 - **導入規則** (introduction) と **除去規則** (elimination)
 - LK体系の右と左に対応

∧の除去規則

- $A \wedge B$ は A でありかつ B であることを意味している。
 - $A \wedge B$ があれば A も B も使うことができる

- LK体系での $A \wedge B$ に関する左の規則

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L_1) \qquad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L_2)$$

- $A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta$ では $A \wedge B$ の仮定があれば A を仮定してよいことを意味している。

- NK体系での $A \wedge B$ に関する**除去規則**

$$\frac{A \wedge B}{A} (\wedge E_1) \qquad \frac{A \wedge B}{B} (\wedge E_2)$$

- 規則の上の $A \wedge B$ から \wedge が消えているため、「**除去**」規則と呼ばれる。

∧の導入規則

- $A \wedge B$ を示すには A と B であることの両方を示さなくてはならない.
- LK体系での $A \wedge B$ に関する右の規則

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B} (\wedge R)$$

- A と B を示すことができれば, $A \wedge B$ を示すことができる.
- NK体系での $A \wedge B$ に関する**導入規則**

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} (\wedge I)$$

- 規則の下の $A \wedge B$ から \wedge が現れているため, 「**導入**」規則と呼ばれる.

Vの導入規則

- $A \vee B$ を示すには A または B であることを示せばよい.
 - A であれば $A \vee B$ である.
 - B であれば $A \vee B$ である.
- LK体系での $A \vee B$ に関する右の規則

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \text{ (vR}_1\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \text{ (vR}_2\text{)}$$

- NK体系での $A \vee B$ に関する導入規則

$$\frac{A}{A \vee B} \text{ (vI}_1\text{)}$$

$$\frac{B}{A \vee B} \text{ (vI}_2\text{)}$$

Vの除去規則

- $A \vee B$ が分かった時に, C であることを示すには,
 - A であっても C であり,
 - B であっても C である
 ことを示せばよい.
- LK体系での $A \vee B$ に関する左の規則

$$\frac{A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (vL)}$$

- NK体系での $A \vee B$ に関する除去規則

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} [A]_i \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B]_i \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \text{ (vE)} \quad \left| \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array} \right| \begin{array}{c} A \text{ を仮定して } C \text{ を示す} \\ B \text{ を仮定して } C \text{ を示す} \\ \hline C \text{ である} \end{array}$$

- 規則の隣の i はこの規則で該当する仮定を捨てた (discharge) ことを示している.

→の導入・除去規則

- に関するLK規則

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} (\rightarrow L) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow R)$$

- に関するNK規則

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} (\rightarrow E) \qquad \frac{[A]_i \quad \vdots \quad B}{A \rightarrow B} i (\rightarrow I)$$

- の除去規則はモーダスポネンス

¬の導入・除去規則

- ¬に関するLK規則

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg L)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} (\neg R)$$

- ¬に関するNK規則

$$\frac{\neg A \quad A}{\perp} (\neg E)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A]_i \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} i \quad (\neg I)$$

$$\frac{\neg \neg A}{A} (\neg \neg)$$

- \perp からはなんでも導くことができる.

$$\frac{\perp}{A} (\perp E)$$

自然演繹での証明

- 自然演繹での証明
 - 推論規則を組み合わせて、一番下の式が、その証明図
 - すべての仮定はdischargeされてなくてはならない。
- 例: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

LK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \\
 \frac{}{B, A \vdash A} \text{ (WL)} \\
 \frac{}{A \vdash B \rightarrow A} \text{ (}\rightarrow\text{R)} \\
 \frac{}{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)} \text{ (}\rightarrow\text{R)}
 \end{array}$$

NK証明図

$$\begin{array}{c}
 [B]_2 \\
 \frac{[A]_1}{B \rightarrow A} \text{ 2 (}\rightarrow\text{I)} \\
 \frac{}{A \rightarrow (B \rightarrow A)} \text{ 1 (}\rightarrow\text{I)}
 \end{array}$$

$[B]_2$ は使う必要がなかった。

証明の例

- $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$ を証明しなさい.

LK証明図

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{(I)} \frac{}{B \vdash B} \\
 \text{(\wedge L}_2\text{)} \frac{}{A \wedge B \vdash B}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{(I)} \\
 \text{(\wedge L}_1\text{)} \frac{}{A \wedge B \vdash A}
 \end{array}
 \\
 \hline
 \text{(\wedge R)} \frac{}{A \wedge B \vdash B \wedge A}
 \\
 \hline
 \text{(\rightarrow R)} \frac{}{\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A}
 \end{array}$$

NK証明図

$$\begin{array}{c}
 \text{(\wedge E}_2\text{)} \frac{[A \wedge B]_1}{B}
 \quad
 \frac{[A \wedge B]_1}{A} \text{(\wedge E}_1\text{)}
 \\
 \hline
 \text{(\wedge I)} \frac{B \quad A}{B \wedge A}
 \\
 \hline
 \text{1 (\rightarrow I)} \frac{B \wedge A}{A \wedge B \rightarrow B \wedge A}
 \end{array}$$

証明の例

- $A \vee B \rightarrow B \vee A$ を証明しなさい.

LK証明図

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{(I)} \frac{}{B \vdash B} \\
 \text{(VR}_2\text{)} \frac{}{A \vdash B \vee A}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{(I)} \\
 \text{(VR}_1\text{)} \frac{}{B \vdash B \vee A}
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 A \vee B \vdash B \vee A \\
 \text{(VL)} \\
 \hline
 \vdash A \vee B \rightarrow B \vee A \text{ (}\rightarrow\text{R)}
 \end{array}
 \end{array}$$

NK証明図

$$\frac{}{A \vee B \rightarrow B \vee A}$$

練習問題(1)

- $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$ を証明しなさい.

$$\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$$

練習問題(2)

- $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$ を証明しなさい.

$$\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$$

二重否定に関する証明

• $A \rightarrow \neg\neg A$ の証明

LK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \\
 \frac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash} \text{ (\neg L)} \\
 \frac{}{\neg A, A \vdash} \text{ (\neg R)} \\
 \frac{}{A \vdash \neg\neg A} \text{ (\neg R)} \\
 \frac{}{\vdash A \rightarrow \neg\neg A} \text{ (\rightarrow R)}
 \end{array}$$

NK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg A]_2 \quad [A]_1}{\perp} \text{ (\neg E)} \\
 \frac{}{\neg\neg A} \text{ 2 (\neg I)} \\
 \frac{}{A \rightarrow \neg\neg A} \text{ 1 (\rightarrow I)}
 \end{array}$$

• $\neg\neg A \rightarrow A$ の証明

LK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \\
 \frac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A} \text{ (\neg R)} \\
 \frac{}{\neg\neg A \vdash A} \text{ (\neg L)} \\
 \frac{}{\vdash \neg\neg A \rightarrow A} \text{ (\rightarrow R)}
 \end{array}$$

NK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg\neg A]_1}{A} \text{ (\neg\neg)} \\
 \frac{}{\neg\neg A \rightarrow A} \text{ 1 (\rightarrow I)}
 \end{array}$$

排中律の証明

• $A \vee \neg A$ の証明

LK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \\
 \frac{}{A \vdash A \vee \neg A} \text{ (}\vee\text{R}_1\text{)} \\
 \frac{}{\vdash A \vee \neg A, \neg A} \text{ (}\neg\text{R)} \\
 \frac{}{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A} \text{ (}\vee\text{R}_2\text{)} \\
 \frac{}{\vdash A \vee \neg A} \text{ (CR)}
 \end{array}$$

NK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg(A \vee \neg A)]_1 \quad \frac{[A]_2}{A \vee \neg A} \text{ (}\vee\text{I}_1\text{)}}{\perp} \text{ (}\neg\text{E)} \\
 \frac{}{\neg A} \text{ (}\neg\text{I)} \\
 \frac{}{\neg A} \text{ (}\vee\text{I}_2\text{)} \\
 \frac{[\neg(A \vee \neg A)]_1 \quad A \vee \neg A}{\perp} \text{ (}\neg\text{E)} \\
 \frac{}{\neg\neg(A \vee \neg A)} \text{ (}\neg\text{I)} \\
 \frac{}{A \vee \neg A} \text{ (}\neg\neg\text{)}
 \end{array}$$

ヒルベルト論理体系

- LK体系もNK体系もゲンツェンによるもの

- ヒルベルト論理体系

- 公理中心

- 推論規則はモーダスポネンスのみ

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \text{ (MP)}$$

- 公理

A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A3. $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

A4. $A \wedge B \rightarrow A$

A5. $A \wedge B \rightarrow B$

A6. $A \rightarrow A \vee B$

A7. $B \rightarrow A \vee B$

A8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

A9. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

A10. $\neg \neg A \rightarrow A$

ヒルベルト論理体系での証明例

T1. $A \rightarrow A$

- [1] $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ ($\because A2$)
- [2] $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ ($\because A1$)
- [3] $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ ($\because 1,2,MP$)
- [4] $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ ($\because A2$)
- [5] $A \rightarrow A$ ($\because 3,4,MP$)

T2. $(D \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow (D \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

- [1] $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ ($\because A2$)
- [2] $[1] \rightarrow (D \rightarrow [1])$ ($\because A1$)
- [3] $D \rightarrow [1]$ ($\because 1,2,MP$)
- [4] $(D \rightarrow [1]) \rightarrow ((D \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow (D \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))))$ ($\because A2$)
- [5] $(D \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow (D \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ ($\because 3,4,MP$)

T3. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

- [1] $((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ ($\because T2$)
- [2] $((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$ ($\because A1$)
- [3] $((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ ($\because 1,2,MP$)

T4. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

- [1] $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ ($\because T3$)
- [2] $[1] \rightarrow (((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ ($\because A2$)
- [3] $((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ ($\because 1,2,MP$)
- [4] $[3] \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow [3])$ ($\because A1$)
- [5] $(A \rightarrow B) \rightarrow [3]$ ($\because 3,4,MP$)
- [6] $((A \rightarrow B) \rightarrow [3]) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))) \rightarrow T4)$ ($\because A2$)
- [7] $((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))) \rightarrow T4$ ($\because 5,6,MP$)
- [8] $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$ ($\because A1$)
- [9] $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ ($\because 7,8,MP$)

ヒルベルト論理体系での証明例

T5. $(C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A \wedge B))$

[1] $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$ (\because A3)

[2] $[1] \rightarrow (C \rightarrow [1])$ (\because A1)

[3] $C \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))$ (\because 1,2,MP)

[4] $(C \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)))$ (\because A2)

[5] $(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))$ (\because 3,4,MP)

[6] $(C \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A \wedge B))$ (\because A2)

[7] $[6] \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow [6])$ (\because A1)

[8] $(C \rightarrow A) \rightarrow [6]$ (\because 6,7,MP)

[9] $((C \rightarrow A) \rightarrow [6]) \rightarrow (((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))) \rightarrow T5)$ (\because A2)

[10] $((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))) \rightarrow T5$ (\because 8,9,MP)

[11] $(C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A \wedge B))$ (\because 5,10,MP)

T6. $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$

[1] $(A \wedge B \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge B \rightarrow A) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow B \wedge A))$ (\because T5)

[2] $A \wedge B \rightarrow B$ (\because A5)

[3] $(A \wedge B \rightarrow A) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow B \wedge A)$ (\because 1,2,MP)

[4] $A \wedge B \rightarrow A$ (\because A4)

[5] $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$ (\because 3,4,MP)

まとめ

- 論理体系
 - 公理と推論規則
- LK論理体系
 - 式 $A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$
 - 始式と定数に関する公理
 - 構造に関する推論規則 (weakening, contraction, cut)
 - 論理結合子に関する推論規則
- NK論理体系
 - より自然に近い
 - 論理結合子に関する導入規則と除去規則
 - 仮定をdischarge
- ヒルベルト論理体系
 - 推論規則はモーダスポネンスのみ
 - 公理中心