

# 論理学

## 第1回「論理学とは」

---

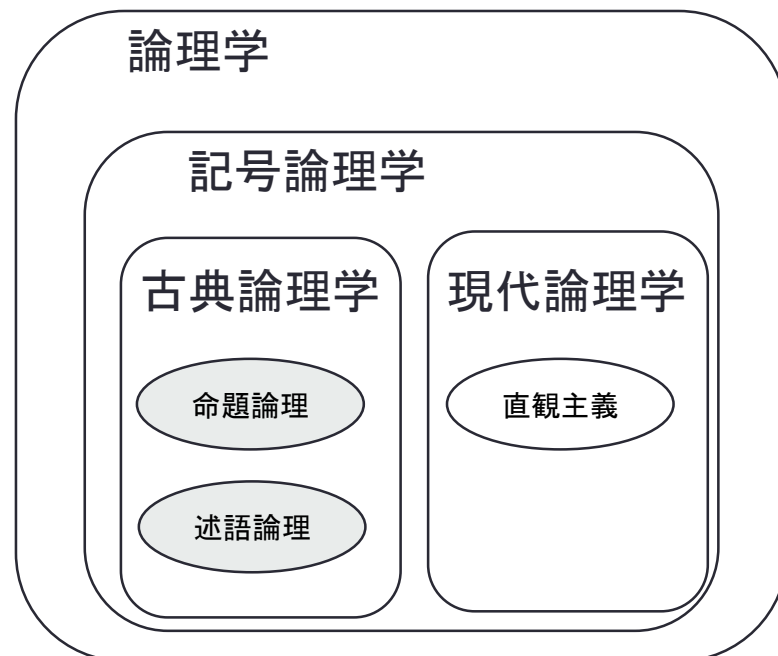
萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

# 授業概要

- 正しい推論とは何か
  - 物事を考えるとき, いろいろな事実から推論して, 正しい内容を導き出す必要がある.
- 記号論理学(数理論理学)
  - 自然言語のままで扱ったのでは, 正しさの見通しが悪くなる.
  - 記号に置き換えることによって, 本質的な論理構造を明らかにする.
  - そのうえで正しい推論とは何かを理解する.
- 正しい vs 証明する
  - 正しいことを示すことが証明.
  - 正しいことはすべて証明できるのか?
- いろいろな論理学
  - 古典論理学
    - 命題論理
    - 述語論理
  - 現代論理学
    - 直観主義
    - 様相論理



# 授業予定

1. 論理学とは

2. 命題と真理値

3. 標準形

4. 証明

5. 健全性と完全性

6. ブール代数

7. 述語論理とは

8. 述語論理の論理式

9. 述語論理における証明

10. エルブラン定理と導出原理

11. PROLOG入門

12. 様相論理と時制論理

13. ペアノの自然数論

14. 直観主義論理

# 論理学とは

- 「論理的に話す」
  - 感情で話してはいけない。
  - 知らないことを想像で話してはいけない。
  - あいまいであってはいけない。
  - 事実や根拠に基づき話す。
  - 論証(推論)において飛躍を行なわない。
  - 正しいことがだれにでも明白に分かるようにする。
  - 矛盾した点がない。
- 論理学
  - 哲学から生まれた。
  - 数理論理学とそれ以外に分けられる。

# 数学における論理学の位置づけ

## 代数

線形代数

整数論

代数方程式

群 環 体

## 幾何

ユークリッド幾何

非ユークリッド幾何

位相幾何

## 解析

微分

積分

偏微分

連続

微分方程式

統計

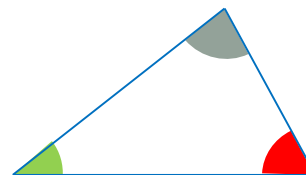
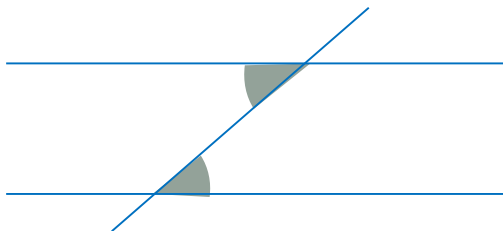
確率

集合論

論理学

# 証明の誕生

- ユークリッド原論
  - ユークリッド(紀元前3世紀)により編纂
- ユークリッド幾何学の公準
  1. 任意の一点から他の一点に対して直線を引くことができる.
  2. 有限の直線を連続的にまっすぐ延長することができる.
  3. 任意の中心と半径で円を描くことができる.
  4. すべての直角は互いに等しい.
  5. 直線が2直線と交わるとき, 同じ側の内角の和が2直角より小さい場合, その2直線が限りなく延長されたとき, 内角の和が2直角より小さい側で交わる.
- 証明
  - 平行線の2つ錯角は等しい
  - 三角形の内角の和は2直角である.



# 証明できますか？

- ピタゴラスの定理
  - 三平方の定理
- 2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  である.
- $\sqrt{2}$  は無理数である.
- $\pi$  は無理数である.
- n次方程式はn個の複素数解を持つ.
- 中間値の定理
  - $a < b$  に対して連続関数  $f$  が  $f(a) < f(b)$  を満たすとき,  $[f(a), f(b)]$  内の任意の点  $h$  に対して  $h = f(c)$  となる点  $c$  が  $[a, b]$  内に存在する.

# ことわざ

## ・「風が吹けば桶屋が儲かる」

1. 風が吹けばほこりが立つ.



2. ほこりが目に入って, 目の不自由は人が増える.



3. 目の不自由な人は, 職業のために三味線を買う.



4. 三味線を作るためにネコの皮が必要になり, ネコが殺される.



5. ネコが減ればネズミが増える.



6. ネズミが増えると桶をかじる.



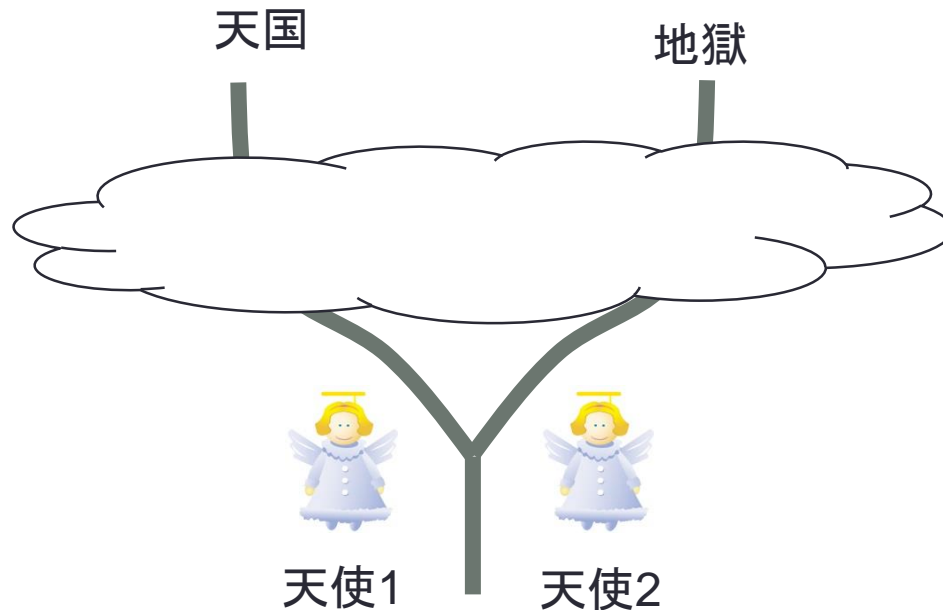
7. 桶が売れるので桶屋が儲かる.



# 論理パズル

- 論理学はパズルとして用いられることも多い。
- あるクレタ人は言った次の文はウソか本当か？
  - 「すべてのクレタ人はウソしか言わない」
- 絶対に外れない予言
  - 「この予言は外れるでしょう」という予言
- 絶対に解けない問題
  - 「この問題は解けない」という問題
- 床屋のパラドックス
  - ある村には床屋が一つだけある。
  - 床屋は自分のひげを剃らない人のひげを剃る。
  - 床屋は自分でひげを剃る人のひげは剃らない。
  - 床屋自身は自分のひげを剃るのか？

# 天国への道



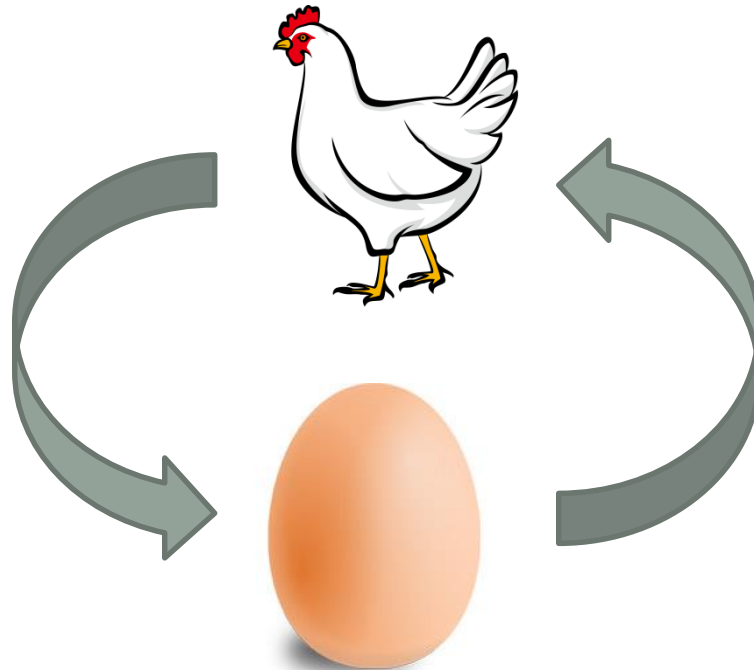
- 天国と地獄の分かれ道に天使が2人立っている
  - 一方の天使は絶対にホントのことを言い、もう一方の天使は絶対にウソのこと言う.
- しかし、どちらがどちらの天使か分からない.
- どちらか一方に、一つだけ質問することができる.
  - ただし、天使はイエスかノーでしか返事しない.
- どんな質問をすれば、正しく天国に行くことができるか？

# 集合論は大丈夫？

- 集合とはある条件にしたがうものを集めたもの
  - 例
    - 人間の集合H
    - 自然数の集合N
    - 今日考えた事象の集合P
    - 犬ではないものの集合D
- 集合の中には自分自身を含むものと、含まないものがある
  - 含まない：H, N
  - 含む：P, D
- ラッセルのパラドックス
  - 「自分自身を含まないものの集合」は集合か？

# ニワトリか卵か？

- 水掛け論の代表例
- ニワトリが先か卵が先か？
  - ニワトリがいなければ卵はない。(ニワトリが卵を産む.)
  - 卵がなければニワトリは生まれない.



# ルーレットで絶対に儲かる賭け方

- ルーレットには赤と黒の数字があり、赤か黒か当てる賭け方ができる。
  - 当たれば賭けたお金の2倍がもらえる。
  - 負けると賭けたお金は没収される。
- 絶対に儲ける方法
  - 最初、赤に1万円を賭ける。
    - 当たれば2万円になるので1万円儲かる。
  - 外れると、次に赤に2万円を賭ける。
    - 当たれば4万円になるので、最初の1万円の損と合わせても1万円儲かる。
  - また、外れると、次に赤に4万円を賭ける。
    - 当たれば8万円になるので、トータルでやはり1万円儲かる。
  - このように外れると、2倍にして次に賭ける。
    - いつか当たるので、必ず1万円儲かることになる。
- これは本当か？
  - ルーレットでは、0には色がついていないので、これも負けになるが、外れた時に2倍より少し多く賭けることにすればよい。
  - 1/2, 1/2の賭けでなくても、同様にできる。

# 多数決は大丈夫？

- あるミスコンテストで美女Aと美女Bが最終候補として残った。
- 最終審査は5人の審査員により3つの要素(性格美, 肉体美, 知性美)で投票する。
  - それぞれの審査員は3つの要素のそれぞれに対して美女AとBのどちらが優れているかを選ぶ。
  - 審査員は3つの要素の多数決で自分が推薦する候補者を決める。
  - 推薦者数の多い美女を優勝者とする。
- この結果, 優勝者はBとなったが, 調べてみるとそれぞれの要素においては, いずれもAの方が多くの支持を得ていることが分かった. こんなことはあるのか？

審査員	性格美	肉体美	知性美	推薦
J1				B
J2				B
J3				B
J4				A
J5				A
	A	A	A	優勝B

# まとめ

- 論理学
  - 推論を扱う
- 記号論理学
  - 記号に置き換えることによって, 本質的な論理構造を明らかにする.
- 取り扱う論理学
  - 命題論理
  - 述語論理