

# 論理学

## 第9回「述語論理の意味」

---

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

# 前回まで

- 命題論理
  - 論理結合子 ( $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\neg$ )
  - 真理値表
  - トートロジー
  - 標準形
  - 公理と証明
  - LK体系とNK体系
  - 健全性と完全性
- 述語論理
  - 述語論理式 (言語, 項)
  - 量化記号 ( $\forall x P(x)$ ,  $\exists x P(x)$ )
  - 束縛変数と自由変数
  - 閉じた論理式

# 述語論理

- 命題論理から述語論理へ
  - 対象とする「もの」の持つ性質やそれらの間の関係を表すように拡張する.
  - 対象変数と述語
- 述語論理
  - 命題変数のかわりに述語の利用を認める
  - 論理結合子は4つ:  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\neg$
  - 量化記号を用いる:  $\forall x$ ,  $\exists x$

# 述語論理で書いてみよう

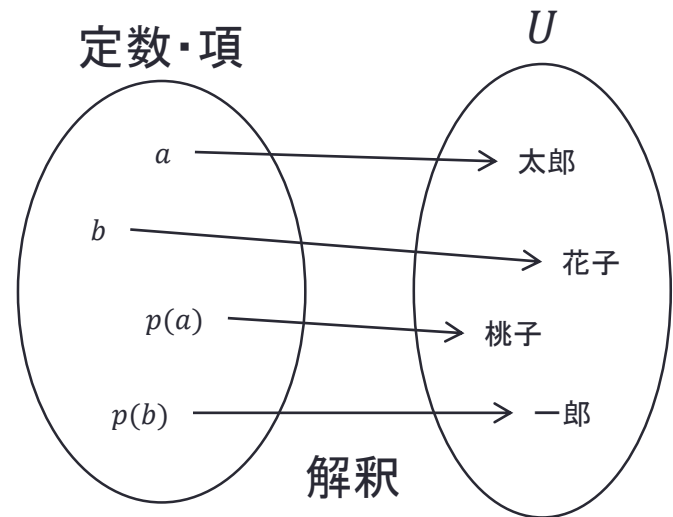
- 述語  $S, M, W, H, T, L$  を以下のようにする.
  - $S(x)$  = 「 $x$  はSFCの学生である. 」
  - $M(x)$  = 「 $x$  は男の人である. 」
  - $W(x)$  = 「 $x$  は女の人である. 」,
  - $H(x)$  = 「 $x$  は格好良い. 」
  - $T(x)$  = 「 $x$  は背が高い. 」
  - $L(x, y)$  = 「 $x$  は  $y$  が好き. 」
- 次の文章を述語論理式として書きなさい.
  1. SFCには学生がいる.
  2. SFCの学生はみな格好良い.
  3. SFCの男子学生は格好良い.
  4. SFCには格好良い男子学生がいる.
  5. SFCの女子学生は背が高い.

# つづき

6. SFCにも背が低い男子学生はいる.
7. SFCの格好良い男子学生は背が高い.
8. SFCの格好良い男子学生が, いつも背が高いとは限らない.
9. SFCの男子学生は背が高いか格好良いかだ.
10. 女子は背が高い男子が好きだ.
11. SFCの女子学生は背が高く格好良い男子学生が好きだ.
12. 男子は背が高ければ女子が好きになる.

# 述語論理の意味

- 述語論理式の真偽を考える場合には、対象定数や変数の範囲を決める必要がある
- **対象領域** (domain)
  - 対象変数の動く範囲の集合  $U$
- **解釈** (interpretation)
  - 定数には  $U$  の特定の要素を対応づける
  - 変数は  $U$  の値を動く
  - 関数記号には  $U$  上の関数を対応づける
  - 述語記号には  $U$  上の述語を対応づける
- **構造** (structure)
  - 対象領域  $U$  と解釈  $\sigma$  の対
  - $\langle U, \sigma \rangle$



# 構造

- 言語  $L$  に対する**構造**  $\mu = \langle U, \sigma \rangle$  とは,
  1.  $U$  は空でない集合 ( $\mu$  の対象領域という)
  2.  $\sigma$  は  $L$  の対象定数, 関数記号, 述語記号を  $U$  上の要素, 関数, 述語に対応させる写像
    - a.  $c$  が対象定数のとき,  $c^\sigma \in U$
    - b.  $f$  が  $n$  変数の関数記号のとき,  $f^\sigma$  は  $U$  上の  $n$  変数の関数:  $f^\sigma: U^n \rightarrow U$
    - c.  $P$  が  $n$  変数の述語(等号以外)のとき,  $P^\sigma$  は  $U$  上の  $n$  変数の述語:  

$$P^\sigma \subseteq U^n$$

上記を満たす  $\sigma$  を解釈という
  
- 言語  $L[\mu]$ 
  - 言語  $L$  に構造  $\mu = \langle U, \sigma \rangle$  の対象領域  $U$  の要素を対象定数として追加したもの
  - $u \in U$  に対して,  $u$  は  $L[\mu]$  の対象定数
  - $u^\sigma = u$

# 構造の例

- 言語  $L$

- 対象定数:  $a, b, c$
- 関数記号:  $f$
- 述語記号:  $S(x), P(x), L(x, y)$

- 構造  $\mu = \langle U, \sigma \rangle$

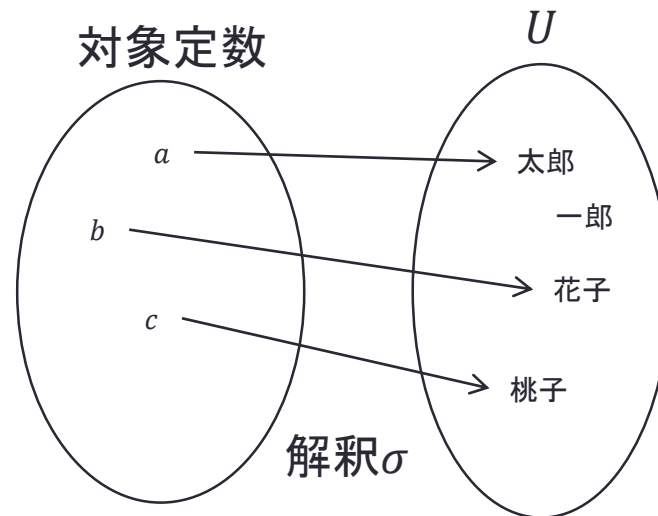
- $U = \{\text{太郎, 一郎, 花子, 桃子}\}$
- 対象定数
  - $a^\sigma = \text{太郎}$
  - $b^\sigma = \text{花子}$
  - $c^\sigma = \text{桃子}$

- 関数記号

- $f^\sigma(\text{太郎}) = \text{一郎}$
- $f^\sigma(\text{一郎}) = \text{太郎}$
- $f^\sigma(\text{花子}) = \text{桃子}$
- $f^\sigma(\text{桃子}) = \text{花子}$

- 述語記号

- $S^\sigma = \{\text{太郎, 花子}\}$
- $P^\sigma = \{\text{花子}\}$
- $L^\sigma = \{(\text{太郎, 花子}), (\text{桃子, 一郎}), (\text{花子, 太郎})\}$





# 論理式に対する意味づけ

- 変数を含まない  $L[\mu]$  の項  $t$  の構造  $\mu = \langle U, \sigma \rangle$  における意味づけ  $\mu$  を次のように定義する.
  1.  $t$  が対象定数  $c$  のとき,  $t^\mu = c^\sigma$
  2.  $t$  が  $f(t_1, \dots, t_n)$  の形するとき,  $t^\mu = f^\sigma(t_1^\mu, \dots, t_n^\mu)$
- $L[\mu]$  の閉じた論理式  $A$  に対して,  $A$  が構造  $\mu = \langle U, I \rangle$  で成り立つことを  $\mu \models A$  と表す. 成り立たない場合には,  $\mu \not\models A$  と表す.
  1.  $\mu \models P(t_1, \dots, t_n) \iff (t_1^\mu, \dots, t_n^\mu) \in P^\sigma$   
等号の場合には,  $\mu \models t_1 = t_2 \iff t_1^\mu = t_2^\mu$
  2.  $\mu \models A \wedge B \iff \mu \models A$  かつ  $\mu \models B$
  3.  $\mu \models A \vee B \iff \mu \models A$  または  $\mu \models B$
  4.  $\mu \models A \rightarrow B \iff \mu \not\models A$  または  $\mu \models B$
  5.  $\mu \models \neg A \iff \mu \not\models A$
  6.  $\mu \models \forall x A \iff$  すべての  $u \in U$  に対して  $\mu \models A[u/x]$
  7.  $\mu \models \exists x A \iff$  ある  $u \in U$  に対して  $\mu \models A[u/x]$
- $A$  が閉じていない場合には,  $A$  の閉包  $A^*$  に対して
  - $\mu \models A \iff \mu \models A^*$

# 意味付けの例

- 項

- $f(a)^\mu = f^\sigma(a^\mu) = f^\sigma(a^\sigma) = f^\sigma(\text{太郎}) = \text{一郎}$

- $f(f(b))^\mu =$

- 論理式

- $\mu \models S(a) \iff a^\mu \in S^\sigma \iff \text{太郎} \in \{\text{太郎}, \text{花子}\}$

- $\mu \models L(a, f(c)) \iff (a^\mu, f(c)^\mu) \in L^\sigma \iff$

- $\mu \models \forall x(P(x) \rightarrow S(x)) \iff$

- $\mu \models \forall x(S(x) \rightarrow \exists y L(x, y)) \iff$

# 恒真な論理式

- $A$  は**恒真**である (valid)
  - 任意の構造  $\mu = \langle U, I \rangle$  に対して  $\mu \models A$

- 恒真な論理式

( $A$  は  $x$  を自由変数として含まず.  $y$  は  $B$  に現れない変数とする)

1.  $\forall x A \equiv A$ ,  $\exists x A \equiv A$
2.  $\forall x B \equiv \forall y B[y/x]$ ,  $\exists x B \equiv \exists y B[y/x]$
3.  $A \wedge \forall x B \equiv \forall x(A \wedge B)$ ,  $A \wedge \exists x B \equiv \exists x(A \wedge B)$
4.  $A \vee \forall x B \equiv \forall x(A \vee B)$ ,  $A \vee \exists x B \equiv \exists x(A \vee B)$
5.  $\forall x B \wedge \forall x C \equiv \forall x(B \wedge C)$ ,  $\exists x B \vee \exists x C \equiv \exists x(B \vee C)$
6.  $\forall x B \vee \forall x C \rightarrow \forall x(B \vee C)$ ,  $\exists x(B \wedge C) \rightarrow \exists x B \wedge \exists x C$
7.  $\forall x \forall y D \equiv \forall y \forall x D$ ,  $\exists x \exists y D \equiv \exists y \exists x D$
8.  $\exists x \forall y D \rightarrow \forall y \exists x D$
9.  $\forall x B \rightarrow \exists x B$
10.  $\neg \forall x B \equiv \exists x \neg B$ ,  $\neg \exists x B \equiv \forall x \neg B$
11.  $A \rightarrow \forall x B \equiv \forall x(A \rightarrow B)$ ,  $A \rightarrow \exists x B \equiv \exists x(A \rightarrow B)$
12.  $\forall x B \rightarrow A \equiv \exists x(B \rightarrow A)$ ,  $\exists x B \rightarrow A \equiv \forall x(B \rightarrow A)$
13.  $\exists x(B \rightarrow C) \equiv \forall x B \rightarrow \exists x C$
14.  $\forall x(B \rightarrow C) \rightarrow (\forall x B \rightarrow \forall x C)$
15.  $\forall x(B \rightarrow C) \rightarrow (\exists x B \rightarrow \exists x C)$

$$A \equiv B$$



$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$



$$\mu \models A \iff \mu \models B$$

• 注意: 次の論理式は恒真ではない.

- $\forall x(B \vee C) \rightarrow \forall x B \vee \forall x C$
- $\exists x B \wedge \exists x C \rightarrow \exists x(B \wedge C)$
- $\exists x B \rightarrow \forall x B$
- $\forall x \exists y D \rightarrow \exists y \forall x D$

# 恒真とそうでない例

- $S(x) = 「x は学生である」$ ,  $T(x) = 「x は教員である」$

○  $\exists x (S(x) \wedge T(x)) \rightarrow \exists x S(x) \wedge \exists x T(x)$

日本語「

」

×  $\exists x S(x) \wedge \exists x T(x) \rightarrow \exists x (S(x) \wedge T(x))$

日本語「

」

- $M(x) = 「x は男である」$ ,  $F(x) = 「x は女である」$

○  $\forall x M(x) \vee \forall x F(x) \rightarrow \forall x (M(x) \vee F(x))$

日本語「

」

×  $\forall x (M(x) \vee F(x)) \rightarrow \forall x M(x) \vee \forall x F(x)$

日本語「

」

- $L(x, y) = 「x は y が好き」$

○  $\exists x \forall y L(x, y) \rightarrow \forall y \exists x L(x, y)$

日本語「

」

×  $\forall x \exists y L(x, y) \rightarrow \exists y \forall x L(x, y)$

日本語「

」

# 恒真と充足可能

- 充足可能
  - $A$  の自由変数を  $x_1, \dots, x_n$  としたとき,  $A$  が充足可能であるとは
    - ある構造  $\mu = \langle U, I \rangle$  と, ある要素  $u_1, \dots, u_n$  に対して  $\mu \models A[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n]$
- $A$  が充足不可能であるための必要十分条件は  $\neg A$  が恒真であること

# 冠頭標準形

- 冠頭論理式 (prenex formula)

- $Q_1, \dots, Q_n$  を  $\forall$  あるいは  $\exists$  のいずれかとし,  $A$  を量化記号を一つも含まない論理式とするとき

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n A$$

を冠頭論理式という

- $A \sim B$

- $A \equiv B$  が恒真のとき,  $A$  と  $B$  は論理的に同値であると言い,  $A \sim B$  と表す.
  - $\sim$  は同値関係になる.

- 定理: 任意の論理式  $A$  に対し, ある冠頭論理式  $A^+$  が存在して,  $A \sim A^+$  が成り立つ.

- 論理式  $A$  に対して  $A \sim A^+$  となる冠頭論理式  $A^+$  を  $A$  の冠頭標準形 (prenex normal form) という.
  - 冠頭標準形は一意的に定まるとは限らない.

# 例

- 次の論理式と論理的に同値な冠頭論理式を求めなさい.

1.  $(\exists y P(y) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x R(x)$

2.  $\exists x R(x, y) \rightarrow \forall y(P(y) \wedge \neg \forall z Q(z))$

3.  $\exists x \left( \forall y(P(y) \rightarrow Q(x, z)) \vee \exists z(\neg \exists u R(z, u) \wedge Q(x, z)) \right)$

# まとめ

- 述語論理の意味
  - 対象領域
  - 解釈
  - 構造 = 対象領域 + 構造
- $\mu \models A$
- 恒真な論理式
  - 充足可能
- 冠頭標準形