論理学
第10回「述語論理の証明」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

前回まで

- 命題論理
  - 論理結合子（$\land$, $\lor$, $\rightarrow$, $\neg$）
  - 真理値表
  - トートロジー
  - 標準形
  - 公理と証明
  - LK体系とNK体系
  - 健全性と完全性

- 述語論理
  - 述語論理式（言語，項）
  - 量化記号（$\forall x\ P(x)$, $\exists x\ P(x)$）
  - 閉じた論理式（束縛変数，自由変数）
  - 述語論理の意味（構造）
  - 恒真な論理式
  - 冠頭論理式

述語論理で書いてみよう

- 述語 S, P, J, M, L, T, H を以下のようにする.
  - $S(x)$ ＝「x はSFCの学生である.」
  - $P(x)$ ＝「x はSFCの教員である.」
  - $J(x)$ ＝「x はSFCの授業である.」
  - $M(x)$ ＝「x は数学の授業である.」
  - $L(x, y)$ ＝「x は y が好き.」
  - $T(x, y)$ ＝「x は y の授業を取る.」
  - $H(x)$ ＝「x は幸福である.」

- 次の文章を述語論理式として書きなさい.
  1. SFCの学生は幸福である.
  2. SFCの授業はすべて数学である.
  3. SFCの学生は好きな授業を取る.
  4. SFCの学生は数学の授業を取らなくてはいけない.

つづき

5. SFCの学生は数学の授業が好き.
6. SFCには数学の授業が嫌いな学生がいる.
7. SFCの学生は数学の授業を取れば，数学の授業を好きになる.
8. SFCに数学の授業が好きな学生がいれば，SFCの先生は幸福である.
9. SFC学生がみな数学の授業を好きなら，SFCの先生は幸福である.

LK体系

- 式(sequent)を用いる.

$$A_1, \ldots, A_m \vdash B_1, \ldots, B_n$$

- 意味：$A_1, \ldots, A_m$のすべてを仮定したとき，$B_1, \ldots, B_n$のどれかを導くことができる.

- 公理と構造に関する推論規則

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\mathrm{I}) \qquad \frac{}{\vdash \top}\ (\top) \qquad \frac{}{\bot \vdash}\ (\bot)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{WL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\mathrm{WR}) \qquad \frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{CL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\mathrm{CR})$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\mathrm{EL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ (\mathrm{ER}) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\mathrm{Cut})$$

LK推論規則

- 論理結合子に関する推論規則

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\wedge L_1) \qquad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\wedge L_2) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B}\ (\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\vee R_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\vee R_2) \qquad \frac{A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\vee L)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \to B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\to L) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B}\ (\to R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\neg L) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ (\neg R)$$

述語論理のLK推論規則

- 命題論理の推論規則に以下の規則を追加する.

$$\frac{A[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x\ A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\forall\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[z/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\ A}\ (\forall\mathrm{R})$$

$$\frac{A[z/x], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x\ A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\exists\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\ A}\ (\exists\mathrm{R})$$

- t は任意の項
- z は対象変数で，下式のどの論理式（$\Gamma, \Delta, \forall x\ A, \exists x\ A$）も自由に出現しないときにのみ適用可能（この条件を変数条件という）.
- z を固有変数（eigen variable）という

推論規則の適用例

- $P(x), Q(x), R(x, y)$ を述語とする.

$$\frac{P(\text{太郎}), \Gamma \vdash \Delta}{\forall x\, P(x), \Gamma \vdash \Delta}\ (\forall\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, P(z)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\, P(x)}\ (\forall\mathrm{R})$$

$$\frac{P(z) \land Q(z), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x (P(x) \land Q(x)), \Gamma \vdash \Delta}\ (\exists\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, P(\text{太郎}) \rightarrow R(\text{太郎}, \text{花子})}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\, (P(x) \rightarrow R(x, \text{花子}))}\ (\exists\mathrm{R})$$

- 次は変数条件を満たしていないので，正しい適用ではない.

$$\frac{P(z) \vdash P(z)}{P(z) \vdash \forall x\, P(x)}\ (\forall\mathrm{R}) \qquad \frac{P(z) \land Q(z) \vdash R(x, z)}{\exists x (P(x) \land Q(z)) \ \vdash R(x, z)}\ (\exists\mathrm{L})$$

証明図

- $\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall x\, B$ （A に x は自由変数として現れない）

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}(\mathrm{I}) \quad \dfrac{}{B \vdash B}(\mathrm{I})}{A \to B, A \vdash B}(\to\mathrm{L})}{\forall x(A \to B), A \vdash B}(\forall\mathrm{L})}{\forall x(A \to B), A \vdash \forall x\, B}(\forall\mathrm{R})}{\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall x\, B}(\to\mathrm{R,EL})
$$

$$
\dfrac{A[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x\, A, \Gamma \vdash \Delta}(\forall\mathrm{L})
$$

項 t として x を選ぶ

固有変数として x を選ぶ

A に x は自由に出現していない

$$
\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A[z/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\, A}(\forall\mathrm{R})
$$

$B[x/x]$ は B

まちがった証明図

- $\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall x\, B$ （A に x は自由変数として現れない）

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\mathrm{I}) \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,(\mathrm{I})}{A \to B, A \vdash B}\,(\to\mathrm{L})}{A \to B, A \vdash \forall x\, B}\,(\forall\mathrm{R})}{A \to B \vdash A \to \forall x\, B}\,(\to\mathrm{R,EL})}{\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall x\, B}\,(\ \forall\mathrm{L}\ )$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A[z/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\, A}\,(\forall\mathrm{R})$$

固有変数として x を選ぶ？

$$\dfrac{A[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x\, A, \Gamma \vdash \Delta}\,(\forall\mathrm{L})$$

項 t として x を選ぶ

ソクラテスの証明

- ソクラテスの問題を証明しなさい.
  - $P(x)$ ＝「x は人間である」
  - $Q(x)$ ＝「x は死ぬ」
  - s をソクラテスを表す対象定数とする

  - 大前提：人間は死ぬ
    - $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$
  - 小前提：ソクラテスは人間である
    - $P(s)$
  - 結論：ソクラテスは死ぬ
    - $Q(s)$

$$\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big), P(s) \vdash Q(s)$$

次の論理式を証明しなさい

- $\forall x\, B \land \forall x\, C \vdash \forall x(B \land C)$

- $\forall x(B \land C) \vdash \forall x\, B \land \forall x\, C$

- $\forall x\, B \lor \forall x\, C \vdash \forall x(B \lor C)$

次の論理式を証明しなさい

- $\neg\forall x\, B \vdash \exists x \neg B$

- $\exists x \neg B \vdash \neg\forall x\, B$

- $\exists x \forall y\, D \vdash \forall y \exists x\, D$

述語論理体系LKの証明に関する定理

- cut除去定理
  - 式 $\Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能であれば，$\Gamma \vdash \Delta$ に至るLKの証明図でcutを一度も用いないものが存在する.

- 証明の部分論理式に関する定理
  - 式 $\Gamma \vdash \Delta$ に至るcutなしの証明図において現れる論理式はすべて $\Gamma \vdash \Delta$ の論理式の部分論理式になっている.

- 述語論理の決定不能性
  - 与えられた式が述語論理体系LKで証明可能であるかどうかは決定不能である.
  - すなわち，証明可能性を判断する有限の手続き（アルゴリズム）は存在しない.
  - チャーチ（Alonzo Church）により証明される.

述語論理体系LKの健全性と完全性

- LKの健全性
  - 任意の式 $\Gamma \vdash \Delta$ に対して，$\Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能であれば，$\Gamma \vdash \Delta$ は恒真である.
  - 各推論規則において上式が恒真の時に，下式も恒式であることを示せばよい.

- LKの完全性
  - 任意の式 $\Gamma \vdash \Delta$ に対して，$\Gamma \vdash \Delta$ が恒真であれば，$\Gamma \vdash \Delta$ はLKで証明可能である.
  - ゲーデル（Kurt Gödel）により証明される.
  - ゲーデルの完全性定理

形式理論

- 言語 L の閉じた論理式の集合 T を形式理論(formal theory)という.
  - 式 $\Gamma \vdash \Delta$ が理論 T で証明可能である
    $\Longleftrightarrow T$ に属する有限個の論理式 $B_1, \dots, B_n$ を適当に選ぶと, $B_1, \dots, B_n, \Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能
  - $T, \Gamma \vdash \Delta$

- T は真と信ずる論理式.「公理的理論」の公理.

- T は矛盾する(inconsistent)
  - $T \vdash$

- T は無矛盾である(consistent)
  - T が矛盾しないとき

- T のモデル(model)
  - T を言語 L の理論で, μ を L に対する構造とするとき, T の属するすべての論理式 A に対して $\mu \vDash A$ のとき, μ を T のモデルという.

等号の公理

- $=$ を言語 L の二変数の述語記号としたとき，次の論理式の集まりを**等号の公理**(equality axiom)という.
  1. $\forall x(x = x)$
  2. $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$
  3. $\forall x \forall y \forall z(x = y \land y = z \to x = z)$
  4. L の m 変数の関数記号 f に対して
     $\forall x_1 \dots \forall x_m \forall y_1 \dots \forall y_m(x_1 = y_1 \land \cdots \land x_m = y_m \to f(x_1, \dots, x_m) = f(y_1, \dots, y_m))$
  5. L の n 変数の述語記号 P に対して
     $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n(x_1 = y_1 \land \cdots \land x_n = y_n \to \left(P(x_1, \dots, x_n) \to P(y_1, \dots, y_n)\right))$

- 今後は言語 L が等号を含めば，L 上の理論 T は常に等号の公理を含むものとする.

例：群の理論

- 言語 L は，対象定数 e，一変数関数記号 $^{-1}$，二変数関数記号 $\cdot$ と $=$ からなすとする．群の理論 T は等号の公理と以下の論理式からなる．
  1. $\forall x \forall y \forall z \big((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\big)$
  2. $\forall x (e \cdot x = x \land x \cdot e = x)$
  3. $\forall x (x \cdot x^{-1} = e \land x^{-1} \cdot x = e)$

- 任意の群 G に対して，単位元を e に，群の演算を $\cdot$ に，逆元を取る演算を $^{-1}$ に対応させる写像を I とすると，構造 $\langle G, I \rangle$ は T のモデルになる．

- T のモデルの構造はひとつの群を自然に定めるため，群 G と構造 $\langle G, I \rangle$ を同一視する．

強い形の完全性とコンパクト性定理

- 強い形の完全性
  - T を任意の理論とする．T が無矛盾であれば T はモデルを持つ．

- 強い形の完全性から完全性の証明
  - $\Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能でない．
  - $\neg C \vdash$ もLKで証明可能でない．（$\Gamma^* \to \Delta_*$ の閉包を C とする）
  - T を $\neg C$ のみからなる理論とすると，$\neg C \vdash$ がLKで証明可能でないことから，T は無矛盾．
  - 強い形の完全性から T はモデル μ を持つ．
  - $\mu \vDash \neg C$
  - $\mu \nvDash C$
  - C は恒真ではなく，$\Gamma \vdash \Delta$ も恒真ではない．

- コンパクト性定理
  - T を任意の理論とする．T がモデルを持つための必要十分条件は T の任意の有限部分集合がモデルを持つことである．

述語論理のNK体系

- ∀ の導入および除去規則

$$\frac{A[z/x]}{\forall x\ A}\ (\forall\mathrm{I}) \qquad \frac{\forall x\ A}{A[t/x]}\ (\forall\mathrm{E})$$

（z は固有変数）

- ∃ の導入および除去規則

$$\frac{A[t/x]}{\exists x\ A}\ (\exists\mathrm{I}) \qquad \frac{\exists x\ A \qquad \begin{matrix}[A[z/x]]_i \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ i\ \ (\exists\mathrm{E})$$

（z は固有変数）

述語論理のヒルベルト論理体系

- 公理：命題論理の公理に加えて次の2つを追加

A11. $A[t/x] \to \exists x\ A$

A12. $\forall x\ A \to A[t/x]$

- 推論規則：モーダスポネンスに加えて次の2つを追加

$$\frac{A \to C}{\exists x\ A \to C} \qquad \frac{C \to A}{C \to \forall x\ A}$$

ただし x は C に自由変数としては出現しないものとする.

まとめ

- 述語論理の形式体系LK
  - 健全性と完全性

- 形式理論
  - 強い形の完全性
  - コンパクト性定理

- 述語論理の形式体系NK