# 論理学
# 第12回「導出原理」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

# 前回まで

- 命題論理
  - 論理結合子（$\land$, $\lor$, $\rightarrow$, $\neg$）
  - 真理値表
  - トートロジー
  - 標準形
  - 公理と証明
  - LK体系とNK体系
  - 健全性と完全性

- 述語論理
  - 述語論理式（言語，項）
  - 量化記号（$\forall x\ P(x)$, $\exists x\ P(x)$）
  - 閉じた論理式（束縛変数，自由変数）
  - 述語論理の意味（構造）
  - 恒真な論理式
  - 冠頭論理式
  - 述語論理のLK体系
  - スコーレム化
  - エルブランの定理

# スコーレム化とエルブランの定理

- スコーレム化
  - 次の2つは同値である.
    - $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y\ A$ が充足可能である.
    - $\forall x_1 \cdots \forall x_n\ A[f(x_1, \dots, x_n)/y]$ が充足可能である.
  - 論理式の充足可能性は，$\forall x_1 \cdots \forall x_n\ A$（$A$ は量化記号を含まない）に変換して調べればよい.

- エルブランの定理
  - $\forall x_1 \cdots \forall x_n\ A$ を言語 $L$ の全称冠頭論理式とする（$A$ は量化記号を含まない論理式とする）.
  - 次の2つは同値である.
    - $\forall x_1 \cdots \forall x_n\ A$ が充足不可能である.
    - ある自然数 $m$ と $H_L$ の項 $t_{i1}, \dots, t_{in}$（$i = 1, \dots, m$）が存在し,

$$A[t_{11}/x_1, \dots, t_{1n}/x_n] \wedge \cdots \wedge A[t_{m1}/x_1, \dots, t_{mn}/x_n]$$

がどのエルブラン構造 $L$ においても充足可能でない.

# 命題論理の導出原理

- 相補的なリテラル
  - リテラル $L$ と $L'$ に対して，$L' = \neg L$ あるいは $L = \neg L'$ であるとき，$L$ と $L'$は**相補的**であるという

- **導出節**（resolvent）
  - 節 $L_1 \vee \cdots \vee L_n$ と節 $L'_1 \vee \cdots \vee L'_m$ において $L_i$ と $L'_j$ が相補的であるとき，それら除いてできる次の節をこの2つの節の**導出節**という.

$$L_1 \vee \cdots \vee L_{i-1} \vee L_{i+1} \vee \cdots \vee L_n \vee L'_1 \vee \cdots \vee L'_{j-1} \vee L'_{j+1} \vee \cdots \vee L'_m$$

- 例
  - $p \vee \neg q \vee r$ と $\neg p \vee q$ の導出節
    - $\neg q$ と $q$ が相補的なので $p \vee r \vee \neg p$
    - $p$ と $\neg p$ が相補的なので $\neg q \vee r \vee q$

- 節の集合から導出節を作り，それをもとの節の集合に加え，繰り返し導出節を作る操作を繰り返すことを**導出原理**（resolution principle）という.

# 導出節

1. $p \lor \neg q$ と $\neg p \lor r$ の導出節は?

2. $p \lor \neg p \lor q$ と $p \lor \neg q \lor r$ の導出節は?

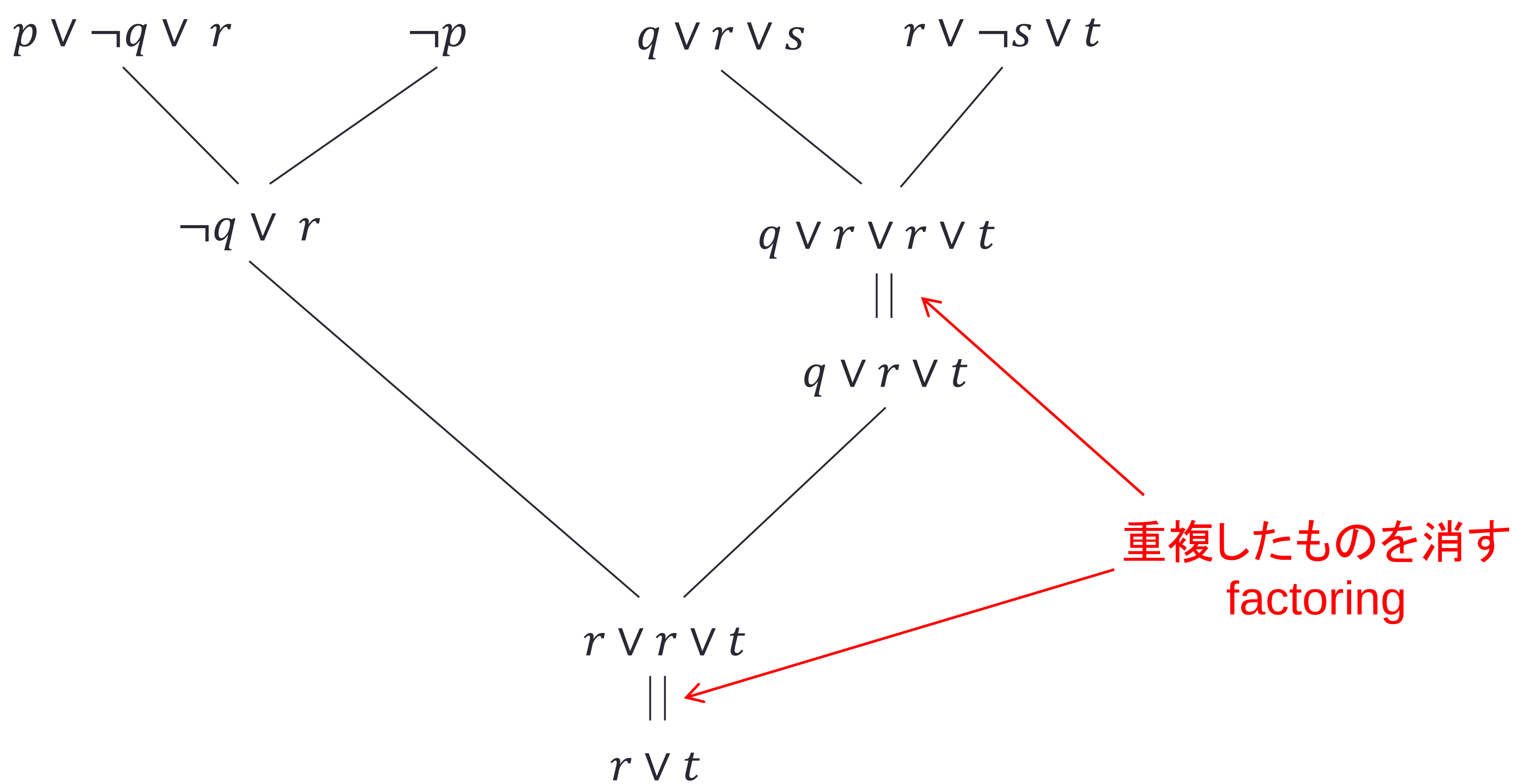
3. $p \lor \neg q$ と $\neg p \lor q$ の導出節は?

4. $p \lor \neg q$ と $\neg p$ の導出節は?

5. $p$ と $\neg p$ の導出節は?

# 導出図

- 節の集合 $\{p \vee \neg q \vee r,\ \neg p,\ q \vee r \vee s,\ r \vee \neg s \vee t\}$



# 導出図

- 節の集合 $\{p \lor \neg q \lor r,\ \neg r,\ q \lor \neg r,\ \neg p \lor r,\ q \lor r\}$

# 導出原理に関する定理

- 節 $C_1$ と $C_2$ の導出節を $C$ としたとき
  - $C_1$ と $C_2$ を真にする付値 $v$ において $C$ も真である.
    - $v(p \vee A) = T$ かつ $v(\neg p \vee B) = T$ ならば $v(A \vee B) = T$ である.

**定理:** 節の集合 $S$ が充足可能であれば，その集合に導出節を追加したものも充足可能である.

- 空節
  - リテラルを1つも含まない節のこと
  - $\square$ で表す
  - 偽または矛盾を表す

**定理:** 節の集合 $S$ から導出図によって $\square$ が導出できた場合，$S$ は充足不可能である.

- $A$ がトートロジーであること示すには，$\neg A$ を節に変換して，$\square$ を導出すればよい.

# 述語論理の場合

- $P(c)$ と $\neg P(z)$ は相補的ではない（$c$ は定数 $z$ は変数とする）
  - $z$ を $c$ に置き換える（変数 $z$ に項 $c$ を代入する）
  - $P(c)$ と $\neg P(c)$ は相補的
- $P(x, f(y))$ と $\neg P(z, z)$ は相補的でない
  - $\theta = [f(y)/x],\ \mu = [f(y)/z]$ とすると
  - $P(x, f(y))\theta = P(z, z)\mu$
- エルブランの定理の利用
  - 節 $C$ が充足不可能であることを示すには，変数に基底項を代入した基底節で充足不可能なものがあることを示せば良い．
  - 節の変数に代入を行ない相補的になるリテラルを作り，空節を導くことができることを示せば，最初の節の集合が充足不可能であることを示すことができる．

# 単一化

- 原始論理式 $P(t_1, ..., t_n)$ と $Q(s_1, ..., s_m)$ が単一化可能(unifiable)であるとは,
  - $P$ と $Q$ が同じ述語記号である
  - $n$ と $m$ が等しい
  - 変数への代入 $\theta$ があり, $t_1\theta = s_1\theta, ..., t_n\theta = s_n\theta$ となる.
  - $\theta$ を単一化代入(unifier)と呼ぶ.
- 最も一般的な単一化代入(most general unifier, mgu)
  - $\theta$ が単一化代入である
  - 任意の単一化代入 $\mu$ に対して, $\theta'$ が存在して $\mu = \theta' \circ \theta$ となる
- mguの求め方:2つの項 $t$ と $t'$ の先頭から比べていき, 不一致の部分を探す.
  - 不一致部分が両方とも変数ではない場合には, 単一化は存在しない.
  - 不一致部分の一方が変数 $x$ であり, もう一方が項 $s$ であった場合,
    - $s$ の中に $x$ が出現する場合には, 単一化は存在しない.
    - そうでない場合には, $\theta = [s/x]$ として, $t\theta$ と $t'\theta$ のmgu $\theta'$ を求め, $\theta' \circ \theta$ が mgu

# 単一化の例

- $P(x, f(y))$ と $P(g(z,z), z)$ のmguは?
  - 最初の不一致は $x$ と $g(z,z)$ なので，$\theta = [g(z,z)/x]$
  - $\theta$ を適用すると，$P(g(z,z), f(y))$ と $P(g(z,z), z)$ になる
  - 不一致は $f(y)$ と $z$ になり，$\theta' = [f(y)/z]$
  - $\theta'$ を適用すると，両方とも $P(g(f(y), f(y)), g(f(y)))$ になる
  - 求めるmguは $\theta' \circ \theta = [g(f(y), f(y))/x, f(y)/z]$

$P(x, f(y))$　　$P(g(z,z), z)$

一致させるには $x = g(z,z)$

$P(g(z,z), f(y))$　　$P(g(z,z), z)$

一致させるには $z = f(y)$

$P(g(f(y), f(y)), g(f(y)))$　　$P(g(f(y), f(y)), g(f(y)))$

# 単一化の例

1. $P(x)$ と $P(f(c))$ のmguは（$c$ は定数）?

2. $P(x,y)$ と $P(z,z)$ のmguは?

3. $P(x,c)$ と $P(z,z)$ のmguは（$c$ は定数）?

4. $P(g(x),f(y))$ と $P(z,f(g(z)))$ のmguは?

# 導出原理の例(1)

- ソクラテスの問題
  - $P(x)$ =「x は人間である」
  - $Q(x)$ =「x は死ぬ」
  - $s$ をソクラテスを表す対象定数

- $P(s) \land \forall x\big(P(x) \to Q(x)\big) \to Q(s)$

# 導出原理の例(2)

- 次の論理式が妥当であることを示しなさい.

$$\forall x\, R(x,x) \land \forall x \forall y \forall z \big(R(x,y) \land R(z,y) \to R(x,z)\big)$$
$$\to \forall x \forall y \forall z \big(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)\big)$$

# 導出原理の例(3)

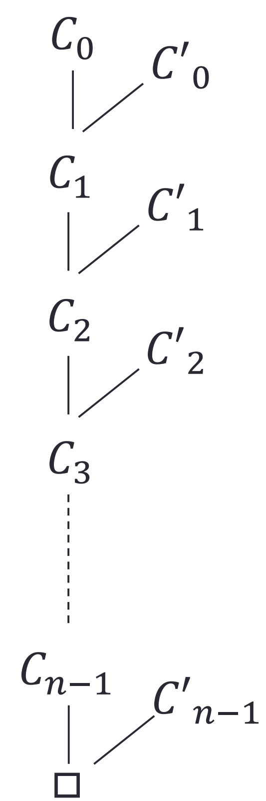
- 次の論理式が妥当であることを示しなさい.

$$\forall x\ \forall y\big(R(x,y) \rightarrow R(y,x)\big)$$
$$\land\ \forall x \forall y \forall z\big(R(x,y) \land R(y,z) \rightarrow R(x,z)\big)$$
$$\land\ \forall x \exists y\ R(x,y)$$
$$\rightarrow\ \forall z\ R(z,z)$$

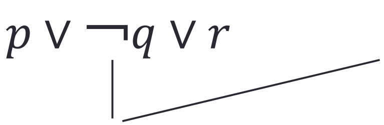
# 線形導出

- 一般の導出では節の組合せを自由に行ない空節を導けば良い.

- 線形導出(linear resolution)
  - 節の集合 : $S$
  - 線形導出 : $C_0, C_1, \ldots, C_n$
  - $C_0 \in S$, $C_n = \Box$
  - $C_{k+1}$ は $C_k$ と $S$ の節あるいは $C_j$ $(j \leq k)$との導出節




- 例: $S = \{\, p \vee \neg q \vee r,\ \ \neg r,\ q \vee \neg r,\ \ \neg p \vee r,\ \ q \vee r \,\}$
- $p \vee \neg q \vee r$ から始まる線形導出を求めよ.



# 論理プログラム

- 論理プログラム
  - ホーン節に限定する
  - ゴール節から線形導出により空節を導く

- ホーン節（Horn clause）
  - 節 $L_1 \vee \cdots \vee L_m$ において高々一つが原始論理式である（残りは原始論理式の否定）
  - プログラム節：原始論理式が一つの節 $A \vee \neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_n$
    - $A \leftarrow B_1, \ldots, B_n$
  - ゴール節：すべてが原始論理式の否定の節 $\neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_n$
    - $\leftarrow B_1, \ldots, B_n$

# SWI-Prolog

- ccx01ではSWI-Prologを使うことができます.
  - 起動するコマンドは pl

```
% pl
Welcome to SWI-Prolog (Multi-threaded, 64 bits, Version 5.10.5)
Copyright (c) 1990-2011 University of Amsterdam, VU Amsterdam
SWI-Prolog comes with ABSOLUTELY NO WARRANTY. This is free software,
and you are welcome to redistribute it under certain conditions.
Please visit http://www.swi-prolog.org for details.

For help, use ?- help(Topic). or ?- apropos(Word).

1 ?- ['user'].
human(socrates).
|: mortal(X):-human(X).
|:
% user://1 compiled 0.00 sec, 1,976 bytes
true.

2 ?- mortal(socrates).
true.

3 ?- halt.
%
```

# まとめ

- 導出原理
  - 2つの節から導出節を作る
  - あたえられた節の集合から空節を導出する

- 単一化
  - 述語の変数に代入することで一致させる
  - 最も一般的な単一化（most general unifier, mgu）

- 論理プログラム
  - ホーン節
  - 線形導出