

# 論理学

## 第13回「不完全性定理」

---

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slides/>

# 前回まで

- 命題論理
  - 論理結合子 ( $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ )
  - 真理値表
  - トートロジー
  - 標準形
  - 公理と証明
  - LK体系とNK体系
  - 健全性と完全性
- 述語論理
  - 述語論理式 (言語, 項)
  - 量化記号 ( $\forall x P(x), \exists x P(x)$ )
  - 閉じた論理式 (束縛変数, 自由変数)
  - 述語論理の意味 (構造)
  - 恒真な論理式
  - 冠頭論理式
  - 述語論理のLK体系
  - スコーレム化
  - エルブランの定理
  - 導出原理
  - ホーン節と論理プログラミング言語

# 数とは何？

- 日常や数学ではさまざまな数を扱っている。
  - 自然数
  - 整数
  - 有理数
  - 無理数
  - 複素数
- 小学校から教えられてきた
  - 存在や定義はあまり気にしてこなかった
  - $1 + 1 = 2$  なのはどうしてか？
  - $(-1) \times (-1) = 1$  なのはどうしてか？

# ペアノの自然数論

- PA: ペアノの自然数論
- 言語  $L_{PA}$ 
  - 対象定数: 0
  - 一変数関数記号:  $S$
  - 二変数関数記号:  $+$ ,  $\times$
  - 公理
    - (1)  $\forall x \neg(S(x) = 0)$
    - (2)  $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
    - (3)  $\forall x (x + 0 = x)$
    - (4)  $\forall x \forall y (x + S(y) = S(x + y))$
    - (5)  $\forall x (x \times 0 = 0)$
    - (6)  $\forall x \forall y (x \times S(y) = (x \times y) + x)$
    - (7) 任意の論理式  $A$  に対し,  $(A[0/x] \wedge \forall x (A \rightarrow A[S(x)/x])) \rightarrow \forall x A$
  - (7) は数学的帰納法

# 標準モデル

- 言語  $L_{PA}$  の構造  $N = \langle N, I \rangle$ 
  - $N$  は自然数全体の集合
  - $0^I$  は自然数 0
  - $S^I(n) = n + 1$  (次の数)
  - $+^I(n, m) = n + m$  (自然数の足し算)
  - $\times^I(n, m) = n \times m$  (自然数の掛け算)

- $N$  は理論  $PA$  のモデルになる
  - 自然数  $N$  をとらえるための理論  $PA$  である
  - $N$  は、理論  $PA$  の標準モデル (standard model)

- $\bar{n}$ 
  - 0 に  $S$  を  $n$  回適用した項
  - $\bar{n} = S(\dots(S(0))\dots)$
  - $\bar{1} = S(0), \bar{2} = S(S(0)), \bar{3} = S(S(S(0)))$

# 自然数の存在？

- 自然数  $N$  が理論  $PA$  を満たすことは分かるが、 $N$  自身は存在するのか？
- 集合論を信ずると：
  - $0$  を空集合  $\emptyset$  とする。
  - 集合  $A$  に対して  $S(A) = A \cup \{A\}$  と定義する。
  - $N$  を  $S$  によって閉じている集合（帰納的集合という）の共通部分とする。
- 公理的集合論の無限集合の公理から  $N$  が存在することが保証される
  - $0 = \emptyset$
  - $\bar{1} = S(0) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$
  - $\bar{2} = S(\bar{1}) = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $\bar{3} = S(\bar{2}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
  - ...
  - $+ \text{ と } \times$  については  $PA$  の公理によって定義する

# 足し算の性質

- 理論PAの公理によって足し算は定義されている

$$(3) \forall x(x + 0 = x)$$

$$(4) \forall x \forall y(x + S(y) = S(x + y))$$

- $\bar{1} + \bar{1} = ?$

- $\bar{1} + \bar{1} = S(0) + S(0) = S(S(0) + 0) = S(S(0)) = \bar{2}$

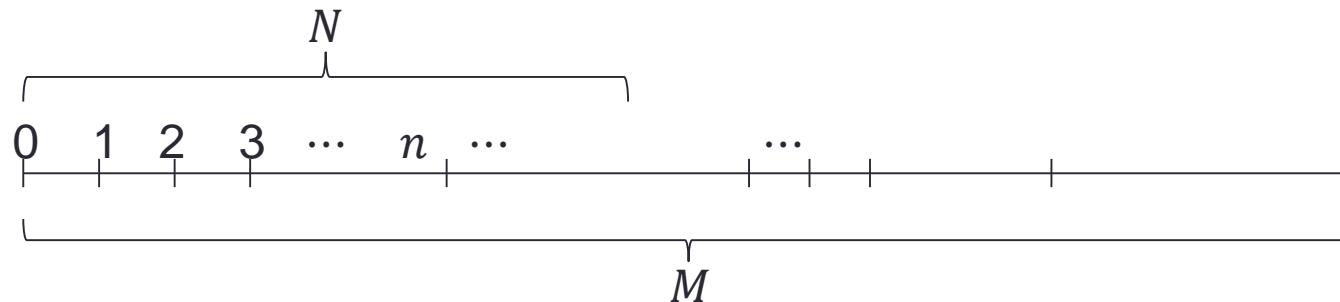
- 足し算に関する定理

- $\forall x \forall y(x + y = y + x)$

- $\forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z))$

# 非標準モデル

- $x < y$ 
  - $\exists z(x + S(z) = y)$
  - $0 < \bar{1} < \bar{2} < \bar{3} < \dots < \bar{n} < \dots$
  - $\forall x(x < \overline{n+1} \rightarrow (x = 0 \vee x = \bar{1} \vee \dots \vee x = \bar{n}))$
- PA の非標準モデル(non-standard model)
  - $M$  は  $N$  と同等な部分構造を持つ



- $M$  上の順序  $\leq$  は整列順序(well-order)ではない.
  - 整列順序: 部分集合は必ず最小限を持つ.
  - $N$  の  $\leq$  は整列順序である.
  - $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = S(y)))$

# 健全性と完全性

- 健全性
  - 正しいことしか証明されない.
  - 証明できたことはすべて正しいことである.
  - 論理学および公理的理論において重要.
- 完全性
  - 正しいことは必ず証明される.
  - 一階述語論理は健全かつ完全である.
  - すべての閉じた論理式は真か偽かを証明できる.
- 公理的理論は必ずしも完全である必要はない
  - 群の公理的理論
    1.  $\forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
    2.  $\forall x (e \cdot x = x \wedge x \cdot e = x)$
    3.  $\forall x (x \cdot x^{-1} = e \wedge x^{-1} \cdot x = e)$
  - $\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$  の真偽は証明できない

# ペアノの自然数論の不完全性

- ペアノの自然数論  $PA$ 
  - 自然数の構造  $N = \langle N, I \rangle$  を公理化したもの.
  - 自然数を扱う数学の定理などにおいて必要なものを公理化したはず.
  - 完全であることが望ましい.
- ゲーデルの第一不完全性定理(Gödel First Incompleteness Theorem)
  - 「 $PA$  が無矛盾(矛盾を証明することはない) であれば不完全である.」
- $PA$  が不完全であるとは?
  - $PA$  の公理から証明することができない自然数に関する真実がある.
- $PA$  が不完全なら、もっと公理を追加すれば良いのでは?
  - $PA$  にいくら公理を追加したとしても、公理集合が決定可能(論理式が公理かどうか判定する手段がある)である限り不完全である.
- ゲーデルの第二不完全性定理(Gödel Second Incompleteness Theorem)
  - 「 $PA$  が無矛盾である」は、 $PA$  では証明できない.」

# ゲーデル文

- $PA$  の不完全性定理は、次のようなゲーデル文を作成することで示す。
  - $G$  は「 $G$  は証明できない」という命題とする。
- 完全だとすると  $G$  あるいは  $G$  の否定が証明可能であるが、
  - $G$  が証明可能であれば、 $G$  は証明できないはずで、
  - $G$  が証明できないのであれば、 $G$  の否定が証明できるはずであるが、そでは  $G$  が証明できることになる。
  - どちらにしても矛盾する。すなわち「 $PA$  が完全であるとすると  $PA$  は矛盾する」
  - 対偶をとると、「 $PA$  が無矛盾であれば  $PA$  は完全ではない」
- 集合論におけるラッセルのパラドックスに似ている(?)
  - 集合  $R$  を  $\{x \mid \neg(x \in x)\}$  とする。
  - $R \in R$  とすると  $\neg(R \in R)$  となり、
  - $\neg(R \in R)$  とすると  $R \in R$  となり、どちらにしても矛盾する。

# ゲーデル数

- ・ ゲーデル文  $G = \text{「}G \text{ は証明できない}\text{」}$  は自己言及の文
  - ・ ペアノの自然数論は数字を扱う公理的理論である.
  - ・ 論理式を数字で符号化する.
- ・ ゲーデル数 (Gödel number)
  - ・ 論理式を構成する記号に一意的な数字を割り当てる
  - ・ 論理式  $P$  は記号の列なので、それを表す数字の列  $x_1, x_2, \dots, x_n$  が対応する
  - ・ 論理式  $P$  のゲーデル数
 
$$\#P = 2^{x_1} \times 3^{x_2} \times \cdots \times p_n^{x_n}$$

$p_n$  は  $n$  番目の素数
  - ・ ゲーデル数が与えられると、素因数分解することで、もとの記号の列が分かる.

# ゲーデル文の構成

- $PA$  を公理とモーダス・ポネンスなどの推論規則からなる自然数の公理的理論とする.
- 次のような論理式を作ることができる
  - $A(x) = \text{「}x\text{ は公理のゲーデル数である}\text{」}$
  - $M(x, y, z) = \text{「}z\text{ をゲーデル数とする論理式は, }x\text{ をゲーデル数とする論理式と, }y\text{ をゲーデル数とする論理式からモーダス・ポネンスを使って導くことができる}\text{」}$
  - $P(x, y) = \text{「}x\text{ のゲーデル数の論理式の証明は論理式の列 }y\text{ で与えられる}\text{」}$
  - $T(x) = \exists y P(x, y) = \text{「}x\text{ のゲーデル数の論理式は証明可能である}\text{」}$
  - $a(y, z) = \text{「}y\text{ の論理式の変数 }x\text{ に自然数 }z\text{ を代入した論理式のゲーデル数}\text{」}$
- ゲーデル文
  - $g$  を論理式  $\neg T(a(x, x))$  のゲーデル数とする
  - ゲーデル文  $G = \neg T(a(g, g))$

# 不完全性定理の証明

- 第一不完全性定理の証明

- $G$  が証明可能であれば,  $a(g, g)$  は証明できない論理式のゲーデル数であるが, それは  $G$  のゲーデル数であり矛盾する.
- 逆に  $\neg G$  が証明可能であれば,  $a(g, g)$  は証明可能な論理式のゲーデル数を意味し, それは  $G$  なので, やはり矛盾する.
- すなわち,  $G$  も  $\neg G$  も証明できない.

- 第二不完全性定理の証明

- 矛盾を表す論理式のゲーデル数を  $b$  とすると
- $\neg T(b) = \text{PA}$  が無矛盾である
- 第一不完全性定理の  $G$  が証明可能であれば, 矛盾するので,  $G \rightarrow T(b)$
- 対偶をとれば,  $\neg T(b) \rightarrow \neg G$
- 同じように,  $\neg G$  が証明可能であっても矛盾するので,  $\neg G \rightarrow T(b)$
- 対偶をとれば,  $\neg T(b) \rightarrow G$  となり, 先ほどと矛盾する.
- すなわち,  $\text{PA}$  が無矛盾であるとすると, 矛盾する.

# 不完全性定理とコンピュータの発明

- $PA$  の不完全性定理はどうして成り立つか?
  - 論理式を数で符合化することで自己言及の論理式を作った.
  - $PA$  を仮定すれば、数字で符合化できる.
- フォンノイマン
  - $PA$  は完全であることを証明しようとしていた.
  - ゲーデルの不完全性定理にショックをうける.
  - ゲーデル数のアイデアをもらい、ノイマン型コンピュータを発明.
  - デジタル計算機では、すべてを数値として扱う.
  - プログラム自身も数値としてメモリに置いておく(ストアドプログラム).
  - プログラム自身もデータである.

# まとめ

- ペアノの自然数論
  - 数学的帰納法
  - 自然数が標準モデル
  - 非標準モデルも存在する
- 不完全性定理
  - $PA$  が無矛盾であれば不完全である.
  - 「 $PA$  が無矛盾である」は、 $PA$  では証明できない.