論理学
第2回「命題と真理値」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

命題

- 命題（proposition）とは真偽が確定している文のこと.
  - 「1 < 2」
  - 「素数は無限に存在する」
  - 「すべての三角形は正三角形である」
  - 「2より大きな偶数は2つの素数の和として表すことができる」（ゴールドバッハ予想）
  - 「太郎は花子が好き」
  - 「慶應義塾大学の本部はSFCである」
  - 「慶應義塾大学は東京の大学である」

- 変数を含む文は真偽が確定できないので命題ではない.
  - 「x < 5」
  - 「太郎はA子が好き」

命題変数

- それ以上分解できない「基本的な命題」を記号で表す.
  - 命題変数（propositional variable）は基本的な命題を表す.
  - $p, q, r, \cdots$

- 基本的でない命題
  - 複文は分解できるので基本的ではない.
  - 「太郎は花子が好きで，花子も太郎が好き」
  - 「風が吹けば猫の数が減るので桶屋が儲かる」
  - 「太郎はSFCへの通学にバスあるいは自転車を使っている」

複合命題

- 基本的な命題を組み合わせて作った命題
  - 単文を組み合わせて複文にする.

- 命題を次の4つの方法で組み合わせる.

接続詞	記号	読み	意味	別記号
「かつ」	$\wedge$	論理積	どちらも成り立つ	$\cap$ &
「または」	$\vee$	論理和	どちらかが成り立つ	$\cup$ |
「ならば」	$\rightarrow$	含意	ある条件で成り立つ	$\supset$ $\Rightarrow$
「いいえ」	$\neg$	否定	逆が成り立つ	$\sim$

論理式

- 論理式(logical formula)は複合命題を表す式

- 定義
  - 命題変数は論理式である.
  - AとBが論理式の時，次は論理式である.
    - $(A \land B)$
    - $(A \lor B)$
    - $(A \rightarrow B)$
    - $(\neg A)$

- 例
  - $(p \rightarrow q)$
  - $(p \rightarrow (q \lor (\neg r)))$
  - $(\neg((p \land q) \rightarrow (r \lor p)))$

括弧の省略

- 論理式に括弧が多過ぎるので，一部省略することにする.
  - 一番外側の括弧は省略しても良い.
  - 論理記号の結合の優先度を次のように決める.
    - $\neg \ > \wedge > \vee \ > \ \rightarrow$
  - $\wedge$と$\vee$は左結合，$\rightarrow$は右結合とする.
    - $p \wedge q \wedge r \equiv (p \wedge q) \wedge r$
    - $p \vee q \vee r \equiv (p \vee q) \vee r$
    - $p \rightarrow q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

- 例
  - $\neg p \wedge q \qquad \equiv$
  - $p \rightarrow q \vee \neg r \qquad \equiv$
  - $\neg \neg p \rightarrow p \qquad \equiv$
  - $p \vee \neg (q \rightarrow p) \qquad \equiv$

論理式を作る

- p は「太郎は花子が好き」を，q は「太郎は桃子が好き」を，r は「花子は太郎が好き」を表す命題変数とする.
- 次の文章を論理式として表しなさい.
  - 「太郎は花子も桃子も好き」
  - 「太郎は花子か桃子のどちらかを好き」
  - 「太郎は花子が好きだが，花子は太郎が嫌い」
  - 「太郎が花子を好きなら，花子も太郎が好き」
  - 「太郎が桃子ではなく花子を好きなら，花子は太郎が好き」
  - 「花子は桃子を好きな太郎を好き」

真理値表

- 命題は，正しい時に「真（true, T）」という値を持ち，正しくない時に「偽（false, F）」の値を持つ．
  - 命題は「真」か「偽」かのどちらかの値を持つ．
  - 「真」の反対は「偽」であり，「偽」の反対は「真」である．
- 論理式の真偽は，命題変数の真偽によって決まる．
- 論理結合された命題の真偽は，結合する論理式の真偽によって決まる．
- 真理値表（truth table）は，論理結合子ごとに真偽を表したもの．

$A \land B$

$A \backslash B$	T	F
T	T	F
F	F	F

$A \lor B$

$A \backslash B$	T	F
T	T	T
F	T	F

$A \rightarrow B$

$A \backslash B$	T	F
T	T	F
F	T	T

$\neg A$

A	$\neg A$
T	F
F	T

排他的論理和

- $A \lor B$はAまたはBのどちらか一方が真の時に真である.
  - AとBの両方が真であっても, $A \lor B$ は真となる.

- 排他的論理和（exclusive or, xor）
  - AとBの両方が真となる場合を排除する.
  - AかBのどちらか一方のみが真の時に限る.

$A \lor B$

$A \backslash B$	T	F
T	T	T
F	T	F

$A \veebar B$

$A \backslash B$	T	F
T	F	T
F	T	F

$A \veebar B$ の代わりに $A \oplus B$ と書くこともある.

論理式の値

- 論理式Aに命題変数 $p_1, p_2, ..., p_n$ が現れる時，Aの真偽値は，$p_1, p_2, ..., p_n$ の真偽によって決まる.
  - $p_1, p_2, ..., p_n$ の真偽から，真理値表を繰り返し使って，Aの真偽値を求めれば良い.

- 例
  - $p \rightarrow q \lor \neg p$ の真偽値

p	q	$\neg p$	$q \lor \neg p$	$p \rightarrow q \lor \neg p$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

練習問題

- $p \vee \neg(q \to p)$ の真理値表を書きなさい.

p	q	$q \to p$	$\neg(q \to p)$	$p \vee \neg(q \to p)$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

トートロジー

- 論理式Aに現れる命題変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ の真偽に関わらず，常に論理式Aの値が真であるとき，Aはトートロジー（tautology）である（Aは恒真（valid）である）と言う.
  - $p_1, p_2, \ldots, p_n$ の真偽の組み合わせは2^n通り.
  - すべての組み合わせにおいてAの真偽を調べれば，トートロジーかどうか分かる.

- **定理:** 論理式がトートロジーであるかどうかは決定可能（decidable）である.

- 例: $p \land (p \to q) \to q$ はトートロジーである.

p	q	$p \to q$	$p \land (p \to q)$	$p \land (p \to q) \to q$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

練習問題

- $p \to p$ がトートロジーであることを示しなさい

p	$p \to p$
T	
F	

- $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ がトートロジーであることを示しなさい

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

まとめ

- 論理学とは
  - 数理論理学
- 命題
  - 命題変数
  - 論理結合子
  - 論理式
- 真理値表
  - 論理結合子の真理値表
  - トートロジー