

# 論理学

## 第8回「述語論理」

---

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

# 前回まで

- 命題論理
  - 論理結合子 ( $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\neg$ )
  - 真理値表
  - トートロジー
  - 標準形
  - 公理と証明
  - LK体系とNK体系
  - 健全性と完全性

# 命題論理の限界

- 命題論理
  - 命題が真か偽かについてのみ考える.
  - 命題が表している対象については考えない.
- ソクラテスの問題(三段論法)
  - (大前提)人間は死ぬ.
  - (小前提)ソクラテスは人間である.
  - (結論)ゆえに, ソクラテスは死ぬ.
- 命題論理で表すことができるか?
  - $p$  = 「人間は死ぬ」
  - $q$  = 「ソクラテスは人間である」
  - $r$  = 「ソクラテスは死ぬ」
  - $p \wedge q \rightarrow r$  ?

# 述語論理へ

- 対象とする「もの」の持つ性質やそれらの間の関係を表すように拡張する.
- 「もの」の集まり
  - 整数
  - 人間
- 「もの」の集まりを動く変数
  - **対象変数** (object variable)
  - $x, y, z, \dots$
- 「もの」の名前
  - **対象定数** (object constant)
  - ソクラテス, ピタゴラス,  $\dots$

# 述語

- **述語** (predicate)
  - 「もの」 $x$  が性質  $P$  を持つ:  $P(x)$
  - 「もの」 $x$  と  $y$  の間には関係  $R$  が成り立つ:  $R(x, y)$
  
- $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 
  - 「もの」 $x_1, x_2, \dots, x_n$  の間に  $Q$  が成り立つ.
  - $Q$  は  $n$  変数の述語
  
- $P(x)$  = 「 $x$  は人間である」
  - $P(\text{ソクラテス})$  = 「ソクラテスは人間である」
  - $P(\text{ピタゴラス})$  = 「ピタゴラスは人間である」
  - $P(\text{太郎})$  = 「太郎は人間である」
  
- $R(x, y)$  = 「 $x$  は  $y$  が好き」
  - $R(\text{太郎}, \text{花子})$  = 「太郎は花子が好き」
  - $R(\text{太郎}, \text{桃子})$  = 「太郎は桃子が好き」
  - $R(\text{花子}, \text{太郎})$  = 「花子は太郎が好き」

# 量化記号

- $P(x)$ 
  - どの  $x$  について  $P$  が成り立つのか?
  - すべての  $x$  について成り立つのか?
  - ある  $x$  について成り立つのか?
- **量化記号** (quantifier)
  - $\forall x P(x)$ 
    - **全称記号** (universal quantifier)
    - すべての  $x$  に対して  $P(x)$  が成り立つ
  - $\exists x P(x)$ 
    - **存在記号** (existential quantifier)
    - ある  $x$  に対して  $P(x)$  が成り立つ
    - $P(x)$  となる  $x$  が存在する
- $Q(x) =$ 「 $x$  は死ぬ」
  - $\forall x Q(x) =$ 「みんな死ぬ」
  - $\exists x Q(x) =$ 「だれか死ぬ」, 「死ぬものがある」

# 述語論理

- 述語論理

- 命題変数のかわりに述語の利用を認める
- 論理結合子は4つ:  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\neg$
- 量化記号を用いる:  $\forall x$ ,  $\exists x$

- ソクラテスの問題:  $P(x) = \text{「}x \text{ は人間である」}$ ,  $Q(x) = \text{「}x \text{ は死ぬ」}$

- $P(\text{ソクラテス}) = \text{「ソクラテスは人間である」}$
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) = \text{「人間は死ぬ」}$
- $Q(\text{ソクラテス}) = \text{「ソクラテスは死ぬ」}$

- 数字の問題:  $P(x) = \text{「}x \text{ は2より大きな素数である」}$ ,  $Q(x) = \text{「}x \text{ は奇数である」}$

- $P(7) = \text{「7は2より大きな素数である」}$
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) = \text{「2より大きな素数は奇数である」}$
- $Q(7) = \text{「7は奇数である」}$

# 例

- 述語  $S(x)$  と  $M(x)$  を次のように定義する.

- $S(x)$  = 「 $x$  はSFCの学生である」
- $M(x)$  = 「 $x$  は数学が好き」

- 次の論理式は何を意味しているか?

- $\forall x S(x)$  = 「┘
- $\exists x S(x)$  = 「┘
- $\forall x (S(x) \rightarrow M(x))$  = 「┘
- $\exists x (S(x) \wedge M(x))$  = 「┘
- $\forall x (S(x) \rightarrow \neg M(x))$  = 「┘
- $\forall x (\neg S(x) \rightarrow M(x))$  = 「┘
- $\forall x \neg S(x)$  = 「┘
- $\neg \forall x S(x)$  = 「┘
- $\neg \forall x (S(x) \rightarrow M(x))$  = 「┘
- $\forall x \neg (S(x) \rightarrow M(x))$  = 「┘
- $\exists x \neg S(x)$  = 「┘
- $\neg \exists x S(x)$  = 「┘



# 例

- 述語  $L(x, y)$  を「 $x$  は  $y$  が好き」とするとき、次の論理式は何を意味しているか？

- $\forall x L(\text{太郎}, x)$  = 「」
- $\exists x L(\text{太郎}, x)$  = 「」
- $\forall x L(x, \text{太郎})$  = 「」
- $\exists x L(x, \text{太郎})$  = 「」
- $\forall x \forall y L(x, y)$  = 「」
- $\exists x \exists y L(x, y)$  = 「」
- $\forall x \exists y L(x, y)$  = 「」
- $\exists x \forall y L(x, y)$  = 「」
- $\exists y \forall x L(x, y)$  = 「」
- $\forall x \forall y (S(x) \rightarrow L(x, y))$  = 「」
- $\forall x \forall y (S(y) \rightarrow L(x, y))$  = 「」
- $\forall x (S(x) \rightarrow \forall y L(x, y))$  = 「」
- $\forall x (\forall y L(y, x) \rightarrow S(x))$  = 「」

# 述語論理の言語

- 述語論理で記述するために必要となる記号の集まりを**言語** (language) という.
  - 言語学の言語とは異なる.
  - 語彙 (vocabulary) に近い.
- 述語論理の言語  $L$  は以下のものからなる
  1. 論理結合子:  $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$
  2. 量化記号:  $\forall, \exists$
  3. 対象変数:  $x, y, z, \dots$
  4. 対象定数:  $c, d, \dots$
  5. 関数記号:  $f, g, \dots$
  6. 述語記号:  $P, Q, \dots, z$

# 項

- 言語  $L$  の項 (term) を次のように定義する.
  1.  $L$  の対象変数, 対象定数は項である.
  2.  $f$  を  $L$  の  $m$  変数の関数記号としたとき,  $t_1, \dots, t_m$  が項であれば,  $f(t_1, \dots, t_m)$  も項である.

- 例: 自然数の理論
  - 対象定数:  $0, 1$  など
  - 関数記号:  $s(x), +, \times$  など
  - 述語記号:  $=, <$  など
  - 項
    - $x$
    - $0$
    - $s(x) + (1 \times s(s(y)))$

# 論理式

- $L$  上の論理式 (logical formula) を次のように定義する.
  1.  $P$  を  $L$  の  $n$  変数の述語記号としたとき,  $t_1, \dots, t_n$  が項であれば,  $P(t_1, \dots, t_n)$  は論理式である (原始論理式, atomic formula).
  2.  $A$  と  $B$  が論理式であれば,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(\neg A)$  は論理式である.
  3.  $A$  が論理式であり,  $x$  が対象変数であれば,  $(\forall x A)$ ,  $(\exists x A)$  は論理式である.

- 例: 自然数の理論

- $\exists x(x \times z = y) \wedge \forall x(x + z > y - z)$
- $\forall x \forall y((x + s(y)) = s(x + y))$

# 束縛変数と自由変数

- 束縛変数 (bound variable)

- $\exists z(x \times z = y)$  において,  $x \times z = y$  の  $z$  は  $\exists z$  によって束縛されている.
- 束縛変数は別の変数に置き換えても意味は変わらない.
- $\exists w(x \times w = y)$

- 束縛されていない変数が自由変数 (free variable)

- $\exists z(x \times z = y)$  における,  $x$  と  $y$  は自由変数

- 変数の出現 (occurrence) ごとに束縛変数か自由変数かは異なる

- $\exists z(x \times z = y) \wedge \exists y(x + x = y)$

自由変数

束縛変数

# 閉じた論理式

- 論理式  $A$  が自由変数を一つも含まないとき,  $A$  は閉じた (closed) 論理式という.
  - $\forall x(S(x) \rightarrow \forall y L(x, y))$
- 論理式  $A$  の自由変数を  $x_1, \dots, x_n$  としたとき,
  - $\forall x_1 \dots \forall x_n A$
  - $A$  の閉包 (universal closure) と呼ぶ.
- 数学では規則などを書くときに全称記号を省略することが多い.
  - 和の交換法則:  $x + y = y + x$
  - 閉包:  $\forall x \forall y (x + y = y + x)$

# 項の代入

- 論理式  $A$  に現れる変数  $x$  の自由な出現を項  $t$  で置き換えることを、項  $t$  の変数  $x$  への代入という.

- $A[t/x]$

- 例

- $A$  を  $\exists z(x \times z = y)$  とする.

- $A[w/y]$  は  $\exists z(x \times z = w)$

- $A[x/y]$  は  $\exists z(x \times z = x)$

- $A[(x + w)/x]$  は  $\exists z((x + w) \times z = y)$

- 束縛関係が変わる代入を行なうときには、束縛変数を変更したから代入する.

- $A[z/y]$  は  $\exists z(x \times z = z)$  ではなく  $\exists w(x \times w = z)$  とする.

- 一般に  $(\forall xA)[t/x]$  は  $\forall u(A[u/x][t/x])$  とすると束縛関係を変えずに代入することができる. ここで  $u$  は  $A$  および  $t$  に現れない変数を選ぶ.

# 部分論理式

- 命題論理と同じように**部分論理式**を定義する.
  1.  $A$  自身は  $A$  の部分論理式である.
  2.  $A$  および  $B$  の部分論理式は  $(A \wedge B)$  の部分論理式である.
  3.  $A$  および  $B$  の部分論理式は  $(A \vee B)$  の部分論理式である.
  4.  $A$  および  $B$  の部分論理式は  $(A \rightarrow B)$  の部分論理式である.
  5.  $A$  の部分論理式は  $(\neg A)$  の部分論理式である.
  6.  $t$  を項としたとき,  $A[t/x]$  の部分論理式は  $\forall xA$  の部分論理式である.
  7.  $t$  を項としたとき,  $A[t/x]$  の部分論理式は  $\exists xA$  の部分論理式である.
- 量化記号を含む場合には部分論理式は無限にある.
  - $\forall xQ(x)$  の部分論理式は,  
 $\forall xQ(x), Q(\text{ソクラテス}), Q(\text{太郎}), Q(\text{母(太郎)}), \dots$



# まとめ

- 述語論理
  - 命題論理の限界
  - 「もの」に関する記述
- 述語論理式
  - 言語
  - 項
  - 論理式
- 量化記号
  - 束縛変数と自由変数
  - 閉じた論理式

# 宿題(述語論理)

## • 問題

- $P(x), S(x), M(x), H(x)$ を下記のような述語とする.
  - $P(x) \equiv$ 「 $x$  はSFCの教員である. 」
  - $S(x) \equiv$ 「 $x$  はSFCの学生である. 」
  - $M(x) \equiv$ 「 $x$  は数学を好き. 」
  - $H(x) \equiv$ 「 $x$  は幸福である. 」

## • このとき

「SFCの教員は, SFCの学生のみんなが数学を好きであれば幸福である. 」

を量化記号を含む述語論理式として書きなさい.

## • 提出

- 締め切り: 今週土曜日
- テキストとして入力してください.
- $\forall$  は all,  $\exists$  は exists と書いてもかまいません.