

論理学

第5回「証明(演習)」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

ボトムアップとトップダウンの証明

ボトムアップ証明

- 正しいと証明された式からはじめて、目的の式まで推論規則を適用していく。
- 始式から始める通常の証明。
- 途中段階も、すべて証明。

$$\frac{\frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \quad \frac{}{B \rightarrow C \vdash B \rightarrow C} \text{ (I)}}{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \vdash B \rightarrow C} \text{ (}\rightarrow\text{L)}$$

トップダウン証明

- 終式から始めて、その式に至る推論規則を探す。
- 最終的に始式に到達すると証明が完成する。
- 途中段階では補題でしかない。

$$\frac{\frac{}{B \vdash B} \text{ (I)} \quad \frac{}{C \vdash C} \text{ (I)}}{B \rightarrow C, B \vdash C} \text{ (}\rightarrow\text{L)}$$

ボトムアップ



$$\frac{\frac{\frac{A, A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash C}{A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C} \text{ (}\rightarrow\text{R)}}{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)} \text{ (}\rightarrow\text{R)}}{\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))} \text{ (}\rightarrow\text{R)}$$

トップダウン



練習問題

- 次の命題を証明しなさい.
 - $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
 - $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
 - $\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A$
 - $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
 - $\vdash \neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
 - $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

練習問題

- 次の命題を証明しなさい.
 - $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
 - $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
 - $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
 - $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
 - $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
 - $(A \wedge B) \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C)$
 - $(A \vee B) \vee C \rightarrow A \vee (B \vee C)$
 - $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
 - $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$
 - $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
 - $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$