論理学
第6回「健全性と完全性」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

前回まで

- 命題
  - 論理結合子（$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$）
  - 真理値表
  - トートロジー

- 標準形
  - 論理和標準形
  - 論理積標準形

- 証明
  - 公理と定理
  - LK体系

式の構文的な意味

定理: 次の3つは同値である.

1. 式 $A_1, \ldots, A_m \vdash B_1, \ldots, B_n$ がLKで証明可能である.
2. 式 $A_1 \land \cdots \land A_m \vdash B_1 \lor \cdots \lor B_n$ がLKで証明可能である.
3. 論理式 $A_1 \land \cdots \land A_m \to B_1 \lor \cdots \lor B_n$ がLKで証明可能である.

証明: 簡単のため, $m = n = 2$ の場合を示す.

- まず, (1)が成り立てば, (2)であることを示す.

$$
\begin{array}{c l}
A_1, A_2 \vdash B_1, B_2 & \\
\hline
A_1, A_2 \vdash B_1, B_1 \lor B_2 & (\lor R_2) \\
\hline
A_1, A_2 \vdash B_1 \lor B_2, B_1 & (ER) \\
\hline
A_1, A_2 \vdash B_1 \lor B_2, B_1 \lor B_2 & (\lor R_1) \\
\hline
A_1, A_2 \vdash B_1 \lor B_2 & (CR) \\
\hline
A_1 \land A_2, A_2 \vdash B_1 \lor B_2 & (\land L_1) \\
\hline
A_2, A_1 \land A_2 \vdash B_1 \lor B_2 & (EL) \\
\hline
A_1 \land A_2, A_1 \land A_2 \vdash B_1 \lor B_2 & (\land L_2) \\
\hline
A_1 \land A_2 \vdash B_1 \lor B_2 & (CL)
\end{array}
$$

証明（つづき）

定理：次の3つは同値である．

1. 式 $A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$ がLKで証明可能である．
2. 式 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \vdash B_1 \vee \cdots \vee B_n$ がLKで証明可能である．
3. 論理式 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \rightarrow B_1 \vee \cdots \vee B_n$ がLKで証明可能である．

証明（つづき）：

- 次に，（2）が成り立てば，（3）であることを示す．

$$\dfrac{A_1 \wedge A_2 \vdash B_1 \vee B_2}{\vdash A_1 \wedge A_2 \rightarrow B_1 \vee B_2}\ (\rightarrow\mathrm{R})$$

証明(つづき)

定理: 次の3つは同値である.

1. 式 $A_1, \ldots, A_m \vdash B_1, \ldots, B_n$ がLKで証明可能である.
2. 式 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \vdash B_1 \vee \cdots \vee B_n$ がLKで証明可能である.
3. 論理式 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \to B_1 \vee \cdots \vee B_n$ がLKで証明可能である.

証明(つづき):

- 最後に, (3)が成り立てば, (1)であることを示す.

$$\dfrac{\vdash A_1 \wedge A_2 \to B_1 \vee B_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A_1 \vdash A_1}(\mathrm{I})}{A_2, A_1 \vdash A_1}(\mathrm{WL})}{A_1, A_2 \vdash A_1}(\mathrm{EL}) \quad \dfrac{\dfrac{}{A_2 \vdash A_2}(\mathrm{I})}{A_1, A_2 \vdash A_2}(\mathrm{WL})}{A_1, A_2 \vdash A_1 \wedge A_2}(\wedge\mathrm{R}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B_1 \vdash B_1}(\mathrm{I})}{B_1 \vdash B_1, B_2}(\mathrm{WR}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B_2 \vdash B_2}(\mathrm{I})}{B_2 \vdash B_2, B_1}(\mathrm{WR})}{B_2 \vdash B_1, B_2}(\mathrm{ER})}{B_1 \vee B_2 \vdash B_1, B_2}(\vee\mathrm{L})}{A_1 \wedge A_2 \to B_1 \vee B_2, A_1, A_2 \vdash B_1, B_2}(\to\mathrm{L})}{A_1, A_2 \vdash B_1, B_2}(\mathrm{Cut})$$

- (1)ならば(2), (2)ならば(3), (3)ならば(1)なので, 3つは同値である.

LKの式の意味

$$A_1, \ldots, A_m \vdash B_1, \ldots, B_n$$

- 直観的な意味
  - A_1からA_mを仮定すると，B_1からB_nのどれかが導かれる.
- 構文的な意味
  - $A_1 \land \cdots \land A_m \vdash B_1 \lor \cdots \lor B_n$
  - $A_1 \land \cdots \land A_m \to B_1 \lor \cdots \lor B_n$
- 構文の解釈
  - 「$A_1, \ldots, A_m$」前件の「,」は「かつ」
  - 「$B_1, \ldots, B_n$」後件の「,」は「または」
  - 「 ⊢ 」は「ならば」

式(sequent)に関するトートロジー

- 論理式のトートロジーを式(sequent)に拡張する.

- Γ を論理式の列 $A_1, \ldots, A_m$ としたとき,

$$\Gamma^* = \begin{cases} A_1 \vee \cdots \vee A_m & m > 0 \text{ のとき} \\ \perp & m = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\Gamma_* = \begin{cases} A_1 \wedge \cdots \wedge A_m & m > 0 \text{ のとき} \\ \top & m = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

- 式 $\Gamma \vdash \Delta$ がトートロジーである ⇔ $\Gamma_* \to \Delta^*$ がトートロジーである

式

$$\Gamma \vdash \Delta$$

論理式

$$\Gamma_* \to \Delta^*$$

健全性と完全性

- $\Gamma \vdash \Delta$ がトートロジーである
  - どんな付値 v のたいしても $v(\Gamma_* \to \Delta^*) = T$
  - 式に現れる命題変数に真偽値をいろいろ変えてみても，いつも $\Gamma_* \to \Delta^*$ の真偽値が真となることを真理値表を使って計算して確かめることができる.
- $\Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能である.
  - $\Gamma \vdash \Delta$ が終式である証明図が存在する.
  - 始式から始めて $\Gamma \vdash \Delta$ が終式であるLKの証明図を構成する.
- 健全性（soundness）
  - LKで証明可能な式はすべてトートロジーである.
- 完全性（completeness）
  - トートロジーである式はすべてLKで証明可能である.

健全性　　完全性

トートロジーと証明の関係

証明されたものは正しい

正しいものは証明できる

公理や推論規則に矛盾がない

公理や推論規則が十分である

- 公理推論体系で両方とも大事である
- 健全でない公理推論体系は利用してはいけない
- 完全でなくとも利用してよく，完全にできない場合もある

健全性の証明

定理: 任意の式 $\Gamma \vdash \Delta$ に対して，$\Gamma \vdash \Delta$ がLK で証明可能であれば，$\Gamma \vdash \Delta$ はトートロジーである.

証明: 次の2つを示せばよい.

1. 任意の始式はトートロジーである.
2. 推論規則において，上の式がすべてトートロジーであれば，下の式もトートロジーである.

1.については，始式 $\mathrm{A} \vdash \mathrm{A}$ は $A \to A$ がトートロジーであることから，トートロジーである.

2.については，それぞれの推論規則について確かめる必要がある. たとえば，

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \to B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\to\mathrm{L})$$

の場合，$\Gamma_{1*} \to {\Delta_1}^* \vee A$ と $\mathrm{B} \wedge \Gamma_{2*} \to {\Delta_2}^*$ がトートロジーの時に，$((A \to B) \wedge \Gamma_{1*} \wedge \Gamma_{2*}) \to ({\Delta_1}^* \vee {\Delta_2}^*)$ がトートロジーになることを示せばよい.

つづき

- 付値vに対して，$v((A \rightarrow B) \wedge \Gamma_{1*} \wedge \Gamma_{2*}) = T$ とすると，$v(A \rightarrow B) = T$，$v(\Gamma_{1*}) = T$，$v(\Gamma_{2*}) = T$ である.

1. $v(A) = F$ とすると $v(\Gamma_{1*} \rightarrow {\Delta_1}^* \vee A) = T$ と $v(\Gamma_{1*}) = T$ から，$v({\Delta_1}^*) = T$ でなくてはならないことが分かる.
2. $v(A) = T$ とすると $v(A \rightarrow B) = T$ より $v(B) = T$ であり，$v(\mathrm{B} \wedge \Gamma_{2*} \rightarrow {\Delta_2}^*) = T$ と $v(\Gamma_{2*}) = T$ であることから，と $v({\Delta_2}^*) = T$ でなくてはならないことが分かる.

いずれの場合であっても，$v({\Delta_1}^* \vee {\Delta_2}^*) = T$ となり，$((A \rightarrow B) \wedge \Gamma_{1*} \wedge \Gamma_{2*}) \rightarrow ({\Delta_1}^* \vee {\Delta_2}^*)$ がトートロジーであることが分かる.

他の規則についても，同じように，上の式がトートロジーであることを仮定すると，下の式もトートロジーであることが分かる.

以上によりLK体系は健全であることが分かる. QED

健全性の証明補足(1)

- weakening left

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{WL})$$

$v(\Gamma_* \to \Delta^*) = T$ ならば $v(A \wedge \Gamma_* \to \Delta^*) = T$

または

$v(\Gamma_*) = F$　　$v(\Delta^*) = T$

$v(A \wedge \Gamma_*) = F$

- contraction right

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\mathrm{CR})$$

$v(\Gamma_* \to \Delta^* \vee A \vee A) = T$ ならば $v(\Gamma_* \to \Delta^* \vee A) = T$

または

$v(\Gamma_*) = F$　　$v(\Delta^* \vee A \vee A) = T$

$v(\Delta^* \vee A) = T$

または

$v(\Delta^*) = T$　　$v(A \vee A) = T$

$v(A) = T$

健全性の証明補足(2)

- cut

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\text{(Cut)}$$

$$v(\Gamma_{1*}) = F \qquad v(\Gamma_{1*} \land \Gamma_{2*}) = F$$

または

$$v({\Delta_1}^* \lor A) = T \qquad v({\Delta_1}^*) = T$$

または

$$v(\Gamma_{1*} \to {\Delta_1}^* \lor A) = T$$

$$v(A) = T$$

かつ

$$v(A \land \Gamma_{2*}) = F \qquad v(\Gamma_{2*}) = F$$

$$v(A \land \Gamma_{2*} \to {\Delta_2}^*) = T$$

または

ならば

$$v({\Delta_2}^*) = T \qquad v({\Delta_1}^* \lor {\Delta_2}^*) = T$$

$$v(\Gamma_{1*} \land \Gamma_{2*} \to {\Delta_1}^* \lor {\Delta_2}^*) = T$$

健全性の証明補足(3)

- $\wedge \mathrm{L}_1$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\wedge \mathrm{L}_1)$$

$v(A \wedge \Gamma_* \to \Delta^*) = T$ ならば $v\big((A \wedge B) \wedge \Gamma_* \to \Delta^*\big) = T$

または

$v(A \wedge \Gamma_*) = F$　　$v(\Delta^*) = T$

または

$v(A) = F$　　$v(\Gamma_*) = F$

$v(A \wedge B) = F$

$v\big((A \wedge B) \wedge \Gamma_*\big) = F$

健全性の証明補足(4)

- →R

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B}\ (\to\mathrm{R})$$

$v(A \wedge \Gamma_* \to \Delta^* \vee B) = T$

ならば

$v\big(\Gamma_* \to \Delta^* \vee (A \to B)\big) = T$

または

$v(A \wedge \Gamma_*) = F$

$v(\Delta^* \vee B) = T$

または

または

$v(A) = F$

$v(\Gamma_*) = F$

$v(\Delta^*) = T$

$v(B) = T$

$v(A \to B) = T$

$v\big(\Delta^* \vee (A \to B)\big) = T$

完全性の証明

定理：任意の式 $\Gamma \vdash \Delta$ に対して，$\Gamma \vdash \Delta$ がトートロジーであれば，$\Gamma \vdash \Delta$ はLKでcutを用いずに証明可能である．

証明：まず，式の分解を次のように定義する．

$$\Gamma \vdash \Delta_1, A \wedge B, \Delta_2 \;\Downarrow\; \Gamma \vdash \Delta_1, A, \Delta_2 \qquad \Gamma \vdash \Delta_1, B, \Delta_2$$

$$\Gamma_1, A \wedge B, \Gamma_2 \vdash \Delta \;\to\; \Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta$$

$$\Gamma \vdash \Delta_1, A \vee B, \Delta_2 \;\to\; \Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2$$

$$\Gamma_1, A \vee B, \Gamma_2 \vdash \Delta \;\Downarrow\; \Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta \qquad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \vdash \Delta$$

$$\Gamma \vdash \Delta_1, A \to B, \Delta_2 \;\to\; A, \Gamma \vdash \Delta_1, B, \Delta_2$$

$$\Gamma_1, A \to B, \Gamma_2 \vdash \Delta \;\Downarrow\; \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta, A \qquad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \vdash \Delta$$

$$\Gamma \vdash \Delta_1, \neg A, \Delta_2 \;\to\; A, \Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2$$

$$\Gamma_1, \neg A, \Gamma_2 \vdash \Delta \;\to\; \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta, A$$

式を分解すると，1つあるいは2つの式が得られる．

分解については次の2つが成り立つ．

- 分解された式の論理結合子の数は，もとの式の論理結合子の数より必ず少ない．
- もとの論理式がトートロジーであれば，分解した式もトートロジーである．

つづき

与えられた式に分解を繰り返し適用する.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \Gamma \vdash \Delta \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \arrow[dl] & & \Gamma_2 \vdash \Delta_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\Gamma_3 \vdash \Delta_3 & & \Gamma_4 \vdash \Delta_4 & & \Gamma_5 \vdash \Delta_5
\end{tikzcd}
$$

一番下には，論理結合子を含まない，命題変数ばかりの式になる.

- これを完全分解木という.
- $\Gamma \vdash \Delta$ がトートロジーの時には，完全分解木の一番下の式は，命題変数だけを含むトートロジーになる.

命題変数だけを含む式 $p_1, \cdots, p_m \vdash q_1, \cdots, q_n$ がトートロジーである必要十分条件は，p_i のどれかが q_j のどれかと一致することである.

$\Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, A, \Delta_2$ はcutなく証明可能である.

- 始式$A \vdash A$ にweakeningとexchangeの規則を用いればよい.

つづき

$\Gamma \vdash \Delta$ を分解して，$\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ と $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$ になったとき，$\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ と $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$ がcutなしで証明可能であれば，$\Gamma \vdash \Delta$ もcutなしで証明可能である.

- それぞれの分解に関して，対応する論理結合子の推論規則とexchange, contractionの規則を用いればよい.

分解

$$\Gamma_1, A \to B, \Gamma_2 \vdash \Delta$$

$$\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta, A \qquad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \vdash \Delta$$

推論規則

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \to B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\to\mathrm{L})$$

よって，式がトートロジーであれば，完全分解木の終端の式はすべて命題変数だけからなるトートロジーであり，cutなしで証明可能である．分解を逆にたどることで，もとの式がcutなしで証明可能なことが分かる.

- 逆に式がトートロジーでない時には，どのように分解しても終端にトートロジーでない式があらわれる.

以上により，LKが完全であることが分かる．QED

証明の過程から，LK では証明可能かどうかを調べる有限の手続きが存在することが分かる.

例

- $\vdash \big((p \to q) \to p\big) \to p$ の完全分解木を求め,
  この式のcutなしの証明図を求めよ.

$\boxed{\text{分解}}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \vdash \big((p \to q) \to p\big) \to p \arrow[d] & \\
& (p \to q) \to p \vdash p \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\vdash p, p \to q \arrow[d] & & p \vdash p \\
p \vdash p, q & &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{証明}}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}(\mathrm{I})}{p \vdash p, q}(\mathrm{WR})}{\vdash p, p \to q}(\to\mathrm{R}) \qquad \dfrac{}{p \vdash p}(\mathrm{I})}{(p \to q) \to p \vdash p, p}(\to\mathrm{L})}{(p \to q) \to p \vdash p}(\mathrm{CR})}{\vdash \big((p \to q) \to p\big) \to p}(\to\mathrm{R})$$

cut除去定理

定理 : 式 $\Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能であれば，$\Gamma \vdash \Delta$ に至るLKの証明図でcutがないものが存在する.

証明 : 証明可能な式はトートロジーであり，トートロジーはcutなしで証明可能である. QED

cutあり証明図

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\UnaryInfC{$\vdash A, \neg A$}
\UnaryInfC{$\vdash A, A \lor \neg A$}
\UnaryInfC{$\vdash A \lor \neg A, A$}
\UnaryInfC{$\vdash A \lor \neg A, A \lor \neg A$}
\UnaryInfC{$\vdash A \lor \neg A$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\UnaryInfC{$B, A \vdash A$}
\UnaryInfC{$A \vdash B \to A$}
\UnaryInfC{$A \vdash (A \to B) \lor (B \to A)$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\UnaryInfC{$\neg A, A \vdash$}
\UnaryInfC{$A, \neg A \vdash$}
\UnaryInfC{$A, \neg A \vdash B$}
\UnaryInfC{$\neg A \vdash A \to B$}
\UnaryInfC{$\neg A \vdash (A \to B) \lor (B \to A)$}
\BinaryInfC{$A \lor \neg A \vdash (A \to B) \lor (B \to A)$}
\BinaryInfC{$\vdash (A \to B) \lor (B \to A)$}
\end{prooftree}
$$

定理 : 式 $\Gamma \vdash \Delta$ のcutなしの証明図に現れる論理式はすべて $\Gamma \vdash \Delta$ の部分論理式である.

双対性

- 推論規則の双対性
  - (¬L)と(¬R)は $\Gamma \vdash \Delta$ の左右を入れ替えたものになっている.
  - ∨と∧の推論規則は左右を入れ替え∨と∧を入れ替えると同じものである.

双対定理: A と B を $\rightarrow$ を含まない論理式としたとき, A および B の $\wedge$ を∨ に, $\vee$ を $\wedge$ に置き換えた論理式を $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ とすると, $A \vdash B$ が証明可能であれば, $\tilde{B} \vdash \tilde{A}$ も証明可能である.

まとめ

- LK体系の健全性
  - LK体系で証明できるものはすべてトートロジーである.
- LK体系の完全性
  - トートロジーはすべてLK体系で証明可能である.
  - 論理式が証明可能であるかどうかを調べる有限の手続きが存在する.
- LK体系の性質
  - cut除去定理
  - 双対定理