論理学
第7回「他の論理体系」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

前回まで

- 命題
  - 論理結合子（∧，∨，→，¬）
  - 真理値表
  - トートロジー
- 標準形
  - 論理和標準形
  - 論理積標準形
  - 論理結合子の制限
- 証明
  - 公理と定理
  - LK体系
- 健全性と完全性
  - LK体系は健全かつ完全である

LK体系

- 式(sequent)を用いる.

$$A_1, \ldots, A_m \vdash B_1, \ldots, B_n$$

- 意味: $A_1, \ldots, A_m$のすべてを仮定したとき, $B_1, \ldots, B_n$のどれかを導くことができる.

- 公理は始式(initial sequent)と定数(⊤と⊥)に関するものだけ.

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\mathrm{I}) \qquad \frac{}{\vdash \top}\ (\top) \qquad \frac{}{\bot \vdash}\ (\bot)$$

- 推論規則は2種類に分けられる.
  - 構造に関する推論規則
  - 論理結合子に関する推論規則

LK推論規則

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\mathrm{I}) \qquad \frac{}{\vdash \top}\ (\top) \qquad \frac{}{\bot \vdash}\ (\bot)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{WL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\mathrm{WR}) \qquad \frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{CL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\mathrm{CR})$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\mathrm{EL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ (\mathrm{ER}) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\mathrm{Cut})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\wedge \mathrm{L}_1) \qquad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\wedge \mathrm{L}_2) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B}\ (\wedge \mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\vee \mathrm{R}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\vee \mathrm{R}_2) \qquad \frac{A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\vee \mathrm{L})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \to B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\to \mathrm{L}) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B}\ (\to \mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\neg \mathrm{L}) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ (\neg \mathrm{R})$$

自然演繹体系

- 自然演繹体系（natural deduction）
  - NK体系と呼ばれる
  - LK体系と同じくゲンツェンによって作られた
  - LK体系は厳密でよいが，少し厳密すぎる
  - より日常の推論に近い推論体系
  - 構造に関する推論規則は存在しない
  - 論理結合子に関する推論規則のみ
  - それぞれの論理結合子に2種類の推論規則
    - 導入規則（introduction）と除去規則（elimination）
    - LK体系の右と左に対応

∧の除去規則

- $A \land B$ は A でありかつ B であることを意味している.
  - $A \land B$ があれば A も B も使うことができる

- LK体系での $A \land B$ に関する左の規則

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \land B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\land \mathrm{L}_1) \qquad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \land B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\land \mathrm{L}_2)$$

  - $A \land B, \Gamma \vdash \Delta$ では $A \land B$ の仮定があれば A を仮定してよいことを意味している.

- NK体系での $A \land B$ に関する除去規則

$$\frac{A \land B}{A}\ (\land \mathrm{E}_1) \qquad \frac{A \land B}{B}\ (\land \mathrm{E}_2)$$

  - 規則の上の $A \land B$ から $\land$ が消えているため,「除去」規則と呼ばれる.

∧の導入規則

- $A \wedge B$ を示すには A と B であることの両方を示さなくてはいけない.

- LK体系での $A \wedge B$ に関する右の規則

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B} \ (\wedge\mathrm{R})$$

  - A と B を示すことができれば, $A \wedge B$ を示すことができる.

- NK体系での $A \wedge B$ に関する導入規則

$$\frac{A \qquad\qquad B}{A \wedge B} \ (\wedge\mathrm{I})$$

  - 規則の下の $A \wedge B$ から $\wedge$ が現れているため, 「導入」規則と呼ばれる.

∨の導入規則

- $A \vee B$ を示すには A または B であることを示せばよい.
  - A であれば $A \vee B$ である.
  - B であれば $A \vee B$ である.

- LK体系での $A \vee B$ に関する右の規則

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\vee R_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\vee R_2)$$

- NK体系での $A \vee B$ に関する導入規則

$$\frac{A}{A \vee B}\ (\vee I_1) \qquad \frac{B}{A \vee B}\ (\vee I_2)$$

∨の除去規則

- $A \lor B$ が分かった時に，C であることを示すには，
  - A であっても C であり，
  - B であっても C である

  ことを示せばよい．

- LK体系での $A \lor B$ に関する左の規則

$$\frac{A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \lor B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\lor \mathrm{L})$$

- NK体系での $A \lor B$ に関する除去規則

$$\frac{A \lor B \qquad \begin{array}{c}[A]_i\\ \vdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]_i\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\,i\ \ (\lor \mathrm{E})$$

$$\underbrace{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\\ A \text{ を仮定して } C \text{ を示す}\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ C\\ B \text{ を仮定して } C \text{ を示す}\end{array}}_{C \text{ である}}$$

  - 規則の隣の i はこの規則で該当する仮定を捨てた（discharge）ことを示している．

→の導入・除去規則

- →に関するLK規則

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \to B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\to\mathrm{L}) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B}\ (\to\mathrm{R})$$

- →に関するNK規則

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}\ (\to\mathrm{E}) \qquad \frac{\begin{array}{c}[A]_i \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B}\,i\ \ (\to\mathrm{I})$$

- →の除去規則はモーダスポネンス

¬の導入・除去規則

- ¬に関するLK規則

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\neg\mathrm{L}) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ (\neg\mathrm{R})$$

- ¬に関するNK規則

$$\frac{\neg A \qquad A}{\bot}\ (\neg\mathrm{E}) \qquad \frac{\begin{array}{c}[A]_i \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\, i \ \ (\neg\mathrm{I}) \qquad \frac{\neg\neg A}{A}\ (\neg\neg)$$

- ⊥ からはなんでも導くことができる.

$$\frac{\bot}{A}\ (\bot\mathrm{E})$$

自然演繹規則(一覧)

$\dfrac{A \wedge B}{A}(\wedge \mathrm{E}_1)$ $\quad$ $\dfrac{A \wedge B}{B}(\wedge \mathrm{E}_2)$	$\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}(\wedge \mathrm{I})$
$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A]_i \\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]_i \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\, i \ (\vee \mathrm{E})$	$\dfrac{A}{A \vee B}(\vee \mathrm{I}_1)$ $\quad$ $\dfrac{B}{A \vee B}(\vee \mathrm{I}_2)$
$\dfrac{A \to B \qquad A}{B}(\to \mathrm{E})$	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]_i \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B}\, i \ (\to \mathrm{I})$
$\dfrac{\neg A \qquad A}{\perp}(\neg \mathrm{E})$	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]_i \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\neg A}\, i \ (\neg \mathrm{I})$
$\dfrac{\perp}{A}(\perp \mathrm{E})$	$\dfrac{\neg\neg A}{A}(\neg\neg)$

自然演繹での証明

- 自然演繹での証明
  - 推論規則を組み合わせて，一番下の式が，その証明図
  - すべての仮定はdischargeされてなくてはならない.

- 例 : $A \to (B \to A)$

LK証明図

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ (\mathrm{I})}{B, A \vdash A}\ (\mathrm{WL})}{A \vdash B \to A}\ (\to\mathrm{R})}{\vdash A \to (B \to A)}\ (\to\mathrm{R})$$

NK証明図

$$[A]_1 \qquad [B]_2$$

$$\dfrac{\dfrac{A}{B \to A}\ 2\ (\to\mathrm{I})}{A \to (B \to A)}\ 1\ (\to\mathrm{I})$$

証明の例

- $A \wedge B \to B \wedge A$ を証明しなさい.

LK証明図

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}(\mathrm{I})}{A \wedge B \vdash B}(\wedge \mathrm{L}_2) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}(\mathrm{I})}{A \wedge B \vdash A}(\wedge \mathrm{L}_1)}{A \wedge B \vdash B \wedge A}(\wedge \mathrm{R})}{\vdash A \wedge B \to B \wedge A}(\to \mathrm{R})$$

NK証明図

$$[\ A \wedge B\ ]_1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}(\wedge \mathrm{E}_2) \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}(\wedge \mathrm{E}_1)}{B \wedge A}(\wedge \mathrm{I})}{A \wedge B \to B \wedge A}\ 1\ (\to \mathrm{I})$$

$[A \wedge B]_1$は複数をdischarge.

証明の例

- $A \lor B \to B \lor A$ を証明しなさい.

LK証明図

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{(I)}
\UnaryInfC{$B \vdash B$}
\LeftLabel{($\lor$R$_2$)}
\UnaryInfC{$A \vdash B \lor A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(I)}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{($\lor$R$_1$)}
\UnaryInfC{$B \vdash B \lor A$}
\RightLabel{($\lor$L)}
\BinaryInfC{$A \lor B \vdash B \lor A$}
\RightLabel{($\to$R)}
\UnaryInfC{$\vdash A \lor B \to B \lor A$}
\end{prooftree}
$$

NK証明図

$$[\ A \lor B\ ]_1 \qquad [\ A\ ]_2 \qquad [\ B\ ]_2$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \lor B$}
\AxiomC{A}
\RightLabel{($\lor$I$_2$)}
\UnaryInfC{$B \lor A$}
\AxiomC{B}
\RightLabel{($\lor$I$_1$)}
\UnaryInfC{$B \lor A$}
\RightLabel{2 ($\lor$E)}
\TrinaryInfC{$B \lor A$}
\RightLabel{1 ($\to$I)}
\UnaryInfC{$A \lor B \to B \lor A$}
\end{prooftree}
$$

練習問題(1)

- $\neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$ を証明しなさい.

$$[\neg A \wedge \neg B]_1$$

$$[\;A \vee B\;]_2$$

$$[\;A\;]_3 \qquad\qquad [\;B\;]_3$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vee B \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A \wedge \neg B}{\neg A}\,(\wedge E_1) \qquad A}{\bot}\,(\neg E) \qquad \dfrac{B \qquad \dfrac{\neg A \wedge \neg B}{\neg B}\,(\wedge E_2)}{\bot}\,(\neg E)}{\bot}\;3\ (\vee E)}{\neg(A \vee B)}\;2\ (\neg I)}{\neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)}\;1\ (\to I)$$

宿題（自然演繹）

- 問題
  - 次の論理式をNK（自然演繹）で証明しなさい.
  - また，前回のLKによる証明と比較しなさい.

$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

- 提出
  - 注意：
    - LKとNKの証明図を書きなさい.
    - どの推論規則を使ったかが分かるようにしなさい.
    - NKについてはdischargeの関係が分かるように書きなさい.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to B]_1}{\cdots} \qquad \dfrac{[\neg B]_2}{\cdots} \qquad \cdots}{\neg A}\,(\neg \mathrm{I})}{\neg B \to \neg A}\,2(\to \mathrm{I})}{(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}\,1(\to \mathrm{I})$$

二重否定に関する証明

- $A \to \neg\neg A$ の証明

LK証明図

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ (\mathrm{I})}{\neg A, A \vdash}\ (\neg\mathrm{L})}{A \vdash \neg\neg A}\ (\neg\mathrm{R})}{\vdash A \to \neg\neg A}\ (\to\mathrm{R})$$

NK証明図

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]_2 \qquad [A]_1}{\perp}\ (\neg\mathrm{E})}{\neg\neg A}\ 2\ (\neg\mathrm{I})}{A \to \neg\neg A}\ 1\ (\to\mathrm{I})$$

- $\neg\neg A \to A$ の証明

LK証明図

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ (\mathrm{I})}{\vdash A, \neg A}\ (\neg\mathrm{R})}{\neg\neg A \vdash A}\ (\neg\mathrm{L})}{\vdash \neg\neg A \to A}\ (\to\mathrm{R})$$

NK証明図

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\neg A]_1}{A}\ (\neg\neg)}{\neg\neg A \to A}\ 1\ (\to\mathrm{I})$$

排中律の証明

- $A \lor \neg A$ の証明

LK証明図

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ (\mathrm{I})}{A \vdash A \lor \neg A}\ (\lor \mathrm{R}_1)}{\vdash A \lor \neg A, \neg A}\ (\neg \mathrm{R})}{\vdash A \lor \neg A, A \lor \neg A}\ (\lor \mathrm{R}_2)}{\vdash A \lor \neg A}\ (\mathrm{CR})
$$

NK証明図

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \lor \neg A)]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \lor \neg A)]_1 \qquad \dfrac{[A]_2}{A \lor \neg A}\ (\lor \mathrm{I}_1)}{\bot}\ (\neg \mathrm{E})}{\neg A}\ 2\ (\neg \mathrm{I})}{A \lor \neg A}\ (\lor \mathrm{I}_2)}{\bot}\ (\neg \mathrm{E})}{\neg\neg(A \lor \neg A)}\ 1\ (\neg \mathrm{I})}{A \lor \neg A}\ (\neg\neg)
$$

ヒルベルト論理体系

- LK体系もNK体系もゲンツェンによるもの

- ヒルベルト論理体系
  - 公理中心
  - 推論規則はモーダスポネンスのみ

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}\ (\mathrm{MP})$$

- 公理

A1. $A \to (B \to A)$

A2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A3. $A \to (B \to A \land B)$

A4. $A \land B \to A$

A5. $A \land B \to B$

A6. $A \to A \lor B$

A7. $B \to A \lor B$

A8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))$

A9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

A10. $\neg\neg A \to A$

ヒルベルト論理体系での証明例

T1. $A \to A$

[1] $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ （∵A2）

[2] $A \to \left((A \to A) \to A\right)$ （∵A1）

[3] $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ （∵1,2,MP）

[4] $A \to (A \to A)$ （∵A1）

[5] $A \to A$ （∵3,4,MP）

$C \equiv A, B \equiv A \to A$

$B \equiv A \to A$

$B \equiv A$

公理

A1. $A \to (B \to A)$

A2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

T2. $(D \to \left(A \to (B \to C)\right)) \to (D \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

[1] $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ （∵A2）

[2] $[1] \to (D \to [1])$ （∵A1）

[3] $D \to [1]$ （∵1,2,MP）

[4] $(D \to [1]) \to \left(\left(D \to \left(A \to (B \to C)\right)\right) \to \left(D \to ((A \to B) \to (A \to C))\right)\right)$ （∵A2）

[5] $\left(D \to \left(A \to (B \to C)\right)\right) \to (D \to ((A \to B) \to (A \to C)))$ （∵3,4,MP）

ヒルベルト論理体系での証明例

T3. $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

[1] $((B \to C) \to \left(A \to (B \to C)\right)) \to ((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$ （∵T2）

[2] $((B \to C) \to \left(A \to (B \to C)\right)$ （∵A1）

[3] $((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ （∵1,2,MP）

T4. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

[1] $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ （∵T3）

[2] $[1] \to \left(\left((B \to C) \to (A \to B)\right) \to ((B \to C) \to (A \to C))\right)$ （∵A2）

[3] $\left((B \to C) \to (A \to B)\right) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ （∵1,2,MP）

[4] $[3] \to ((A \to B) \to [3])$ （∵A1）

[5] $(A \to B) \to [3]$ （∵3,4,MP）

[6] $\left((A \to B) \to [3]\right) \to \left(\left((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B))\right) \to \mathrm{T4}\right)$ （∵A2）

[7] $\left((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B))\right) \to T4$ （∵6,7,MP）

[8] $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B))$ （∵A1）

[9] $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ （∵7,8,MP）

ヒルベルト論理体系での証明例

T5. $(C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to A \land B))$

[1] $A \to (B \to A \land B)$ （∵A3）
[2] $[1] \to (C \to [1])$ （∵A1）
[3] $C \to (A \to (B \to A \land B))$ （∵1,2,MP）
[4] $(C \to (A \to (B \to A \land B))) \to ((C \to A) \to (C \to (B \to A \land B))$ （∵A2）
[5] $(C \to A) \to (C \to (B \to A \land B))$ （∵3,4,MP）
[6] $(C \to (B \to A \land B)) \to ((C \to B) \to (C \to A \land B))$ （∵A2）
[7] $[6] \to ((C \to A) \to [6])$ （∵A1）
[8] $(C \to A) \to [6]$ （∵6,7,MP）
[9] $((C \to A) \to [6]) \to (((C \to A) \to (C \to (B \to A \land B))) \to \mathrm{T5})$ （∵A2）
[10] $((C \to A) \to (C \to (B \to A \land B))) \to \mathrm{T5})$ （∵8,9,MP）
[11] $(C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to A \land B))$ （∵5,10,MP）

T6. $A \land B \to B \land A$

[1] $(A \land B \to B) \to ((A \land B \to A) \to (A \land B \to B \land A))$ （∵T5）
[2] $A \land B \to B$ （∵A5）
[3] $(A \land B \to A) \to (A \land B \to B \land A)$ （∵1,2,MP）
[4] $A \land B \to A$ （∵A4）
[5] $A \land B \to B \land A$ （∵3,4,MP）

ラムダ式と自然演繹

- ラムダ計算
  - 計算のモデルの一つ
  - 関数抽象 $(\lambda x.M)$ と関数適用 (MN) から構成

- ラムダ式の型

$$\frac{\begin{array}{c} x : A \\ \vdots \\ M : B \end{array}}{(\lambda x.M) : A \to B}$$

→ の導入規則

$$\frac{M : A \to B \qquad N : A}{(MN) : B}$$

→ の除去規則

- ラムダ式の型の決定と，自然演繹で証明できることが対応

ヒルベルト論理体系とコンビネータ

- コンビネータ
  - 特別なラムダ式
  - $K \equiv \lambda xy.x$
  - $S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$
- 定理:任意のラムダ式に対して, $\alpha\beta$変換同値なSK式が存在する.
- ヒルベルト論理体系の → に関する公理は SK 式の型と一致している.
  - $K \equiv \lambda xy.x : \left(A \to (B \to A)\right)$
  - $S \equiv \lambda xyz.xz(yz) : \left(A \to (B \to C)\right) \to \left((A \to B) \to (A \to C)\right)$
- ヒルベルト論理体系の推論規則(モーダスポネンス)は関数適用に対応している.

まとめ

- 論理体系
  - 公理と推論規則

- LK論理体系
  - 式$A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$
  - 始式と定数に関する公理
  - 構造に関する推論規則（weakening, contraction, exchange, cut）
  - 論理結合子に関する推論規則

- NK論理体系
  - より自然に近い
  - 論理結合子に関する導入規則と除去規則
  - 仮定をdischarge

- ヒルベルト論理体系
  - 推論規則はモーダスポネンスのみ
  - 公理中心

- ラムダ式と論理体系