

論理学

第8回「述語論理」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

前回まで

- 命題論理
 - 論理結合子 (\wedge , \vee , \rightarrow , \neg)
 - 真理値表
 - トートロジー
 - 標準形
 - 公理と証明
 - LK体系とNK体系
 - 健全性と完全性

命題論理の限界

- 命題論理
 - 命題が真か偽かについてのみ考える.
 - 命題が表している対象については考えない.
- ソクラテスの問題(三段論法)
 - (大前提)人間は死ぬ.
 - (小前提)ソクラテスは人間である.
 - (結論)ゆえに, ソクラテスは死ぬ.
- 命題論理で表すことができるか?
 - p = 「人間は死ぬ」
 - q = 「ソクラテスは人間である」
 - r = 「ソクラテスは死ぬ」
 - $p \wedge q \rightarrow r$?

述語論理へ

- 対象とする「もの」の持つ性質やそれらの間の関係を表すように拡張する.
- 「もの」の集まり
 - 整数
 - 人間
- 「もの」の集まりを動く変数
 - **対象変数** (object variable)
 - x, y, z, \dots
- 「もの」の名前
 - **対象定数** (object constant)
 - ソクラテス, ピタゴラス, \dots

述語

- **述語** (predicate)
 - 「もの」 x が性質 P を持つ: $P(x)$
 - 「もの」 x と y の間には関係 R が成り立つ: $R(x, y)$

- $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 - 「もの」 x_1, x_2, \dots, x_n の間に Q が成り立つ.
 - Q は n 変数の述語

- $P(x) =$ 「 x は人間である」
 - $P(\text{ソクラテス}) =$ 「ソクラテスは人間である」
 - $P(\text{ピタゴラス}) =$ 「ピタゴラスは人間である」
 - $P(\text{太郎}) =$ 「太郎は人間である」

- $R(x, y) =$ 「 x は y が好き」
 - $R(\text{太郎}, \text{花子}) =$ 「太郎は花子が好き」
 - $R(\text{太郎}, \text{桃子}) =$ 「太郎は桃子が好き」
 - $R(\text{花子}, \text{太郎}) =$ 「花子は太郎が好き」

量化記号

- $P(x)$
 - どの x について P が成り立つのか?
 - すべての x について成り立つのか?
 - ある x について成り立つのか?
- **量化記号** (quantifier)
 - $\forall x P(x)$
 - **全称記号** (universal quantifier)
 - すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ
 - $\exists x P(x)$
 - **存在記号** (existential quantifier)
 - ある x に対して $P(x)$ が成り立つ
 - $P(x)$ となる x が存在する
- $Q(x) =$ 「 x は死ぬ」
 - $\forall x Q(x) =$ 「みんな死ぬ」
 - $\exists x Q(x) =$ 「だれか死ぬ」, 「死ぬものがある」

述語論理

- 述語論理

- 命題変数のかわりに述語の利用を認める
- 論理結合子は4つ: \wedge , \vee , \rightarrow , \neg
- 量化記号を用いる: $\forall x$, $\exists x$

- ソクラテスの問題: $P(x)$ = 「 x は人間である」, $Q(x)$ = 「 x は死ぬ」

- $P(\text{ソクラテス})$ = 「ソクラテスは人間である」
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ = 「人間は死ぬ」
- $Q(\text{ソクラテス})$ = 「ソクラテスは死ぬ」

- 数字の問題: $P(x)$ = 「 x は2より大きな素数である」, $Q(x)$ = 「 x は奇数である」

- $P(7)$ = 「7は2より大きな素数である」
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ = 「2より大きな素数は奇数である」
- $Q(7)$ = 「7は奇数である」

例

- 述語 $S(x)$ と $M(x)$ を次のように定義する.

- $S(x)$ = 「 x はSFCの学生である」
- $M(x)$ = 「 x は数学が好き」

- 次の論理式は何を意味しているか?

- $\forall x S(x)$ = 「┘
- $\exists x S(x)$ = 「┘
- $\forall x (S(x) \rightarrow M(x))$ = 「┘
- $\exists x (S(x) \wedge M(x))$ = 「┘
- $\forall x (S(x) \rightarrow \neg M(x))$ = 「┘
- $\forall x (\neg S(x) \rightarrow M(x))$ = 「┘
- $\forall x \neg S(x)$ = 「┘
- $\neg \forall x S(x)$ = 「┘
- $\neg \forall x (S(x) \rightarrow M(x))$ = 「┘
- $\forall x \neg (S(x) \rightarrow M(x))$ = 「┘
- $\exists x \neg S(x)$ = 「┘
- $\neg \exists x S(x)$ = 「┘

例

- 述語 $L(x, y)$ を「 x は y が好き」とするとき、次の論理式は何を意味しているか？

- $\forall x L(\text{太郎}, x)$ = 「」
- $\exists x L(\text{太郎}, x)$ = 「」
- $\forall x L(x, \text{太郎})$ = 「」
- $\exists x L(x, \text{太郎})$ = 「」
- $\forall x \forall y L(x, y)$ = 「」
- $\exists x \exists y L(x, y)$ = 「」
- $\forall x \exists y L(x, y)$ = 「」
- $\exists x \forall y L(x, y)$ = 「」
- $\exists y \forall x L(x, y)$ = 「」
- $\forall x \forall y (S(x) \rightarrow L(x, y))$ = 「」
- $\forall x \forall y (S(y) \rightarrow L(x, y))$ = 「」
- $\forall x (S(x) \rightarrow \forall y L(x, y))$ = 「」
- $\forall x (\forall y L(y, x) \rightarrow S(x))$ = 「」

述語論理の言語

- 述語論理で記述するために必要となる記号の集まりを**言語** (language) という.
 - 言語学の言語とは異なる.
 - 語彙 (vocabulary) に近い.

- 述語論理の言語 L は以下のものからなる
 1. 論理結合子: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$
 2. 量化記号: \forall, \exists
 3. 対象変数: x, y, z, \dots
 4. 対象定数: c, d, \dots
 5. 関数記号: f, g, \dots
 6. 述語記号: P, Q, \dots, z

項

- 言語 L の項 (term) を次のように定義する.
 1. L の対象変数, 対象定数は項である.
 2. f を L の m 変数の関数記号としたとき, t_1, \dots, t_m が項であれば, $f(t_1, \dots, t_m)$ も項である.

- 例: 自然数の理論
 - 対象定数: $0, 1$ など
 - 関数記号: $s(x), +, \times$ など
 - 述語記号: $=, <$ など
 - 項
 - x
 - 0
 - $s(x) + (1 \times s(s(y)))$

論理式

- L 上の論理式 (logical formula) を次のように定義する.
 1. P を L の n 変数の述語記号としたとき, t_1, \dots, t_n が項であれば, $P(t_1, \dots, t_n)$ は論理式である (原始論理式, atomic formula).
 2. A と B が論理式であれば, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(\neg A)$ は論理式である.
 3. A が論理式であり, x が対象変数であれば, $(\forall x A)$, $(\exists x A)$ は論理式である.

- 例: 自然数の理論

- $\exists x(x \times z = y) \wedge \forall x(x + z > y - z)$
- $\forall x \forall y((x + s(y)) = s(x + y))$

束縛変数と自由変数

- 束縛変数 (bound variable)

- $\exists z(x \times z = y)$ において, $x \times z = y$ の z は $\exists z$ によって束縛されている.
- 束縛変数は別の変数に置き換えても意味は変わらない.
- $\exists w(x \times w = y)$

- 束縛されていない変数が自由変数 (free variable)

- $\exists z(x \times z = y)$ における, x と y は自由変数

- 変数の出現 (occurrence) ごとに束縛変数か自由変数かは異なる

- $\exists z(x \times z = y) \wedge \exists y(x + x = y)$

自由変数

束縛変数

閉じた論理式

- 論理式 A が自由変数を一つも含まないとき, A は閉じた (closed) 論理式という.
 - $\forall x(S(x) \rightarrow \forall y L(x, y))$
- 論理式 A の自由変数を x_1, \dots, x_n としたとき,
 - $\forall x_1 \dots \forall x_n A$
 - A の閉包 (universal closure) と呼ぶ.
- 数学では規則などを書くときに全称記号を省略することが多い.
 - 和の交換法則: $x + y = y + x$
 - 閉包: $\forall x \forall y (x + y = y + x)$

項の代入

- 論理式 A に現れる変数 x の自由な出現を項 t で置き換えることを、項 t の変数 x への代入という。

- $A[t/x]$

- 例

- A を $\exists z(x \times z = y)$ とする。

- $A[w/y]$ は $\exists z(x \times z = w)$

- $A[x/y]$ は $\exists z(x \times z = x)$

- $A[(x + w)/x]$ は $\exists z((x + w) \times z = y)$

- 束縛関係が変わる代入を行なうときには、束縛変数を変更したから代入する。

- $A[z/y]$ は $\exists z(x \times z = z)$ ではなく $\exists w(x \times w = z)$ とする。

- 一般に $(\forall xA)[t/x]$ は $\forall u(A[u/x][t/x])$ とすると束縛関係を変えずに代入することができる。ここで u は A および t に現れない変数を選ぶ。

部分論理式

- 命題論理と同じように**部分論理式**を定義する.
 1. A 自身は A の部分論理式である.
 2. A および B の部分論理式は $(A \wedge B)$ の部分論理式である.
 3. A および B の部分論理式は $(A \vee B)$ の部分論理式である.
 4. A および B の部分論理式は $(A \rightarrow B)$ の部分論理式である.
 5. A の部分論理式は $(\neg A)$ の部分論理式である.
 6. t を項としたとき, $A[t/x]$ の部分論理式は $\forall xA$ の部分論理式である.
 7. t を項としたとき, $A[t/x]$ の部分論理式は $\exists xA$ の部分論理式である.
- 量化記号を含む場合には部分論理式は無数にある.
 - $\forall xQ(x)$ の部分論理式は,
 $\forall xQ(x), Q(\text{ソクラテス}), Q(\text{太郎}), Q(\text{母(太郎)}), \dots$

まとめ

- 述語論理
 - 命題論理の限界
 - 「もの」に関する記述
- 述語論理式
 - 言語
 - 項
 - 論理式
- 量化記号
 - 束縛変数と自由変数
 - 閉じた論理式