論理学
第9回「述語論理の意味」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

前回まで

- 命題論理
  - 論理結合子（∧，∨，→，¬）
  - 真理値表
  - トートロジー
  - 標準形
  - 公理と証明
  - LK体系とNK体系
  - 健全性と完全性

- 述語論理
  - 述語論理式（言語，項）
  - 量化記号（$\forall x\ P(x)$，$\exists x\ P(x)$）
  - 束縛変数と自由変数
  - 閉じた論理式

述語論理

- 命題論理から述語論理へ
  - 対象とする「もの」の持つ性質やそれらの間の関係を表すように拡張する.
  - 対象変数と述語

- 述語論理
  - 命題変数のかわりに述語の利用を認める
  - 論理結合子は4 つ: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$
  - 量化記号を用いる: $\forall x$, $\exists x$

述語論理で書いてみよう

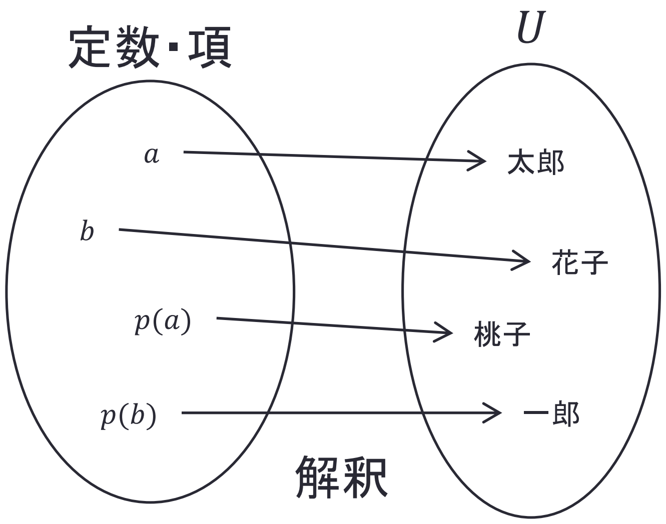
- 述語 S, M, W, H, T, L を以下のようにする.
  - $S(x)$ ＝「x はSFCの学生である. 」
  - $M(x)$ ＝「x は男の人である. 」
  - $W(x)$ ＝「x は女の人である. 」,
  - $H(x)$ ＝「x は格好良い. 」
  - $T(x)$ ＝「x は背が高い. 」
  - $L(x, y)$ ＝「x は y が好き. 」
- 次の文章を述語論理式として書きなさい.
  1. SFCには学生がいる.
  2. SFCの学生はみんな格好良い.
  3. SFCの男子学生は格好良い.
  4. SFCには格好良い男子学生がいる.
  5. SFCの女子学生は背が高い.

つづき

6. SFCにも背が低い男子学生はいる.
7. SFCの格好良い男子学生は背が高い.
8. SFCの格好良い男子学生が, いつも背が高いとは限らない.
9. SFCの男子学生は背が高いか格好良いかだ.
10. 女子は背が高い男子が好きだ.
11. SFCの女子学生は背が高く格好良い男子学生が好きだ.
12. 男子は背が高ければ女子が好きになる.

述語論理の意味

- 述語論理式の真偽を考える場合には，対象定数や変数の範囲を決める必要がある



- 対象領域（domain）
  - 対象変数の動く範囲の集合 U
- 解釈（interpretation）
  - 定数には U の特定の要素を対応づける
  - 変数は U の値を動く
  - 関数記号には U 上の関数を対応づける
  - 述語記号には U 上の述語を対応づける
- 構造（structure）
  - 対象領域 U と解釈 σ の対
  - $\langle U, \sigma \rangle$

構造

- 言語 L に対する**構造** $\mu = \langle U, \sigma \rangle$ とは,
  1. U は空でない集合(μの対象領域という)
  2. σ は L の対象定数, 関数記号, 述語記号を U 上の要素, 関数, 述語に対応させる写像
     a. c が対象定数のとき, $c^\sigma \in U$
     b. f が n 変数の関数記号のとき, f^σ は U 上の n 変数の関数: $f^\sigma: U^n \to U$
     c. P が n 変数の述語(等号以外)のとき, P^σ は U 上の n 変数の述語:
        $P^\sigma \subseteq U^n$

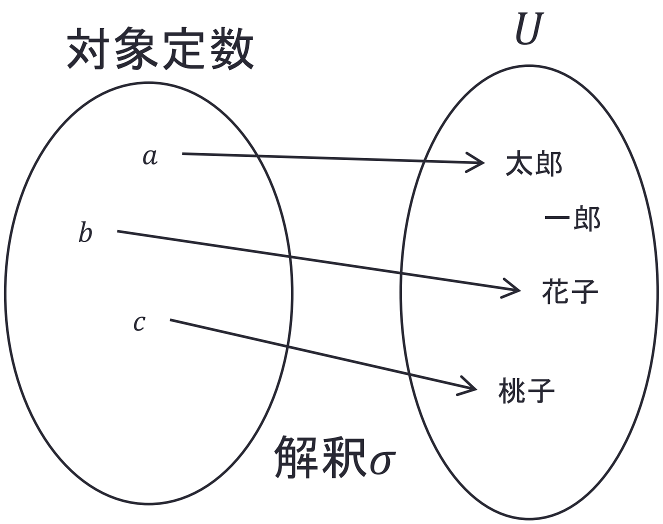
  上記を満たす σ を解釈という

- 言語 $L[\mu]$
  - 言語 L に構造 $\mu = \langle U, \sigma \rangle$ の対象領域 U の要素を対象定数として追加したもの
  - $u \in U$ に対して, u は $L[\mu]$ の対象定数
  - $u^\sigma = u$

構造の例

- 言語 L
  - 対象定数 : a, b, c
  - 関数記号 : f
  - 述語記号 : $S(x), P(x), L(x, y)$

- 構造 $\mu = \langle U, \sigma \rangle$
  - $U = \{$太郎, 一郎, 花子, 桃子$\}$
  - 対象定数
    - $a^\sigma =$ 太郎
    - $b^\sigma =$ 花子
    - $c^\sigma =$ 桃子
  - 関数記号
    - f^σ(太郎) $=$ 一郎
    - f^σ(一郎) $=$ 太郎
    - f^σ(花子) $=$ 桃子
    - f^σ(桃子) $=$ 花子
  - 述語記号
    - $S^\sigma = \{$太郎, 花子$\}$
    - $P^\sigma = \{$花子$\}$
    - $L^\sigma = \{$(太郎, 花子), (桃子, 一郎), (花子, 太郎)$\}$



論理式に対する意味づけ

- 変数を含まない $L[\mu]$ の項 t の構造 $\mu = \langle U, \sigma \rangle$ における意味づけ μ, t^μ, を次のように定義する.
  1. t が対象定数 c のとき, $t^\mu = c^\sigma$
  2. t が $f(t_1, \cdots, t_n)$ の形のとき, $t^\mu = f^\sigma({t_1}^\mu, \cdots, {t_n}^\mu)$

- $L[\mu]$ の閉じた論理式 A に対して, A が構造 $\mu = \langle U, \sigma \rangle$ で成り立つことを $\mu \vDash A$ と表す. 成り立たない場合には, $\mu \nvDash A$ と表す.
  1. $\mu \vDash P(t_1, \cdots, t_n) \iff ({t_1}^\mu, \cdots, {t_n}^\mu) \in P^\sigma$
     等号の場合には, $\mu \vDash t_1 = t_2 \iff {t_1}^\mu = {t_2}^\mu$
  2. $\mu \vDash A \wedge B \iff \mu \vDash A$ かつ $\mu \vDash B$
  3. $\mu \vDash A \vee B \iff \mu \vDash A$ または $\mu \vDash B$
  4. $\mu \vDash A \to B \iff \mu \nvDash A$ または $\mu \vDash B$
  5. $\mu \vDash \neg A \iff \mu \nvDash A$
  6. $\mu \vDash \forall x\, A \iff$ すべての $u \in U$ に対して $\mu \vDash A[u/x]$
  7. $\mu \vDash \exists x\, A \iff$ ある $u \in U$ に対して $\mu \vDash A[u/x]$

- A が閉じていない場合には, A の閉包 A^* に対して
  - $\mu \vDash A \iff \mu \vDash A^*$

意味付けの例

- 項
  - $f(a)^\mu = f^\sigma(a^\mu) = f^\sigma(a^\sigma) = f^\sigma(\text{太郎}) = \text{一郎}$
  - $f(f(b))^\mu = f^\sigma\big(f^\sigma(b^\sigma)\big) = f^\sigma\big(f^\sigma(\text{花子})\big) = f^\sigma(\text{桃子}) = \text{花子}$
- 論理式
  - $\mu \vDash S(a) \Longleftrightarrow a^\mu \in S^\sigma \Longleftrightarrow \text{太郎} \in \{\text{太郎}, \text{花子}\}$
  - $\mu \vDash L(a, f(c)) \Longleftrightarrow (a^\mu, f(c)^\mu) \in L^\sigma \Longleftrightarrow (a^\sigma, f^\sigma(c^\sigma)) \in L^\sigma$

    $\Longleftrightarrow (\text{太郎}, f(\text{桃子})) \in L^\sigma$

    $\Longleftrightarrow (\text{太郎}, \text{花子}) \in \{(\text{太郎}, \text{花子}), (\text{桃子}, \text{一郎}), (\text{花子}, \text{太郎})\}$
  - $\mu \vDash \forall x(P(x) \to S(x)) \Longleftrightarrow$

    すべての $u \in U$ に対して，$\mu \vDash P(u) \to S(u)$
  - $\mu \vDash \forall x(S(x) \to \exists y\, L(x, y)) \Longleftrightarrow$

    すべての $u \in U$ に対して，ある $v \in U$ があり，$\mu \vDash S(u) \to L(u, v)$

恒真な論理式

- A は恒真である（valid）
  - 任意の構造 $\mu = \langle U, \sigma \rangle$ に対して $\mu \vDash A$

$A \equiv B$

$\Updownarrow$

$(A \to B) \wedge (B \to A)$

$\Updownarrow$

$\mu \vDash A \Longleftrightarrow \mu \vDash B$

- 恒真な論理式
  （A は x を自由変数として含まず．y は B に現れない変数とする）
  1. $\forall x\, A \equiv A$,　$\exists x\, A \equiv A$
  2. $\forall x\, B \equiv \forall y\, B[y/x]$,　$\exists x\, B \equiv \exists y\, B[y/x]$
  3. $A \wedge \forall x\, B \equiv \forall x(A \wedge B)$,　$A \wedge \exists x\, B \equiv \exists x(A \wedge B)$
  4. $A \vee \forall x\, B \equiv \forall x(A \vee B)$,　$A \vee \exists x\, B \equiv \exists x(A \vee B)$
  5. $\forall x\, B \wedge \forall x\, C \equiv \forall x(B \wedge C)$,　$\exists x\, B \vee \exists x\, C \equiv \exists x(B \vee C)$
  6. $\forall x\, B \vee \forall x\, C \to \forall x(B \vee C)$,　$\exists x\, (B \wedge C) \to \exists x\, B \wedge \exists x\, C$
  7. $\forall x \forall y\, D \equiv \forall y \forall x\, D$,　$\exists x \exists y\, D \equiv \exists y \exists x\, D$
  8. $\exists x \forall y\, D \to \forall y \exists x\, D$
  9. $\forall x\, B \to \exists x\, B$
  10. $\neg \forall x\, B \equiv \exists x \neg B$,　$\neg \exists x\, B \equiv \forall x \neg B$
  11. $A \to \forall x\, B \equiv \forall x(A \to B)$,　$A \to \exists x\, B \equiv \exists x(A \to B)$
  12. $\forall x\, B \to A \equiv \exists x(B \to A)$,　$\exists x\, B \to A \equiv \forall x(B \to A)$
  13. $\exists x\, (B \to C) \equiv \forall x\, B \to \exists x\, C$
  14. $\forall x\, (B \to C) \to (\forall x\, B \to \forall x\, C)$
  15. $\forall x\, (B \to C) \to (\exists x\, B \to \exists x\, C)$

- 注意：次の論理式は恒真ではない．
  - $\forall x(B \vee C) \to \forall x\, B \vee \forall x\, C$
  - $\exists x\, B \wedge \exists x\, C \to \exists x\, (B \wedge C)$
  - $\exists x\, B \to \forall x\, B$
  - $\forall x \exists y\, D \to \exists y \forall x\, D$

恒真とそうでない例

- $S(x)$ =「x は学生である」, $T(x)$ =「x は教員である」
  ○ $\exists x\left(S(x) \wedge T(x)\right) \to \exists x\, S(x) \wedge \exists x\, T(x)$
  日本語「学生かつ教員である人がいれば，学生も存在するし，教員も存在する.　」
  × $\exists x\, S(x) \wedge \exists x\, T(x) \to \exists x\left(S(x) \wedge T(x)\right)$
  日本語「学生も存在し，教員も存在するなら，学生かつ教員である人も存在する　」
- $M(x)$ =「x は男である」, $F(x)$ =「x は女である」
  ○ $\forall x\, M(x) \vee \forall x\, F(x) \to \forall x\left(M(x) \vee F(x)\right)$
  日本語「すべてが男であるかすべてが女であれば，すべては男か女である　」
  × $\forall x\left(M(x) \vee F(x)\right) \to \forall x\, M(x) \vee \forall x\, F(x)$
  日本語「すべてが男か女であれば，すべては男であるかすべては女であるかのどちらかである　」
- $L(x, y)$ =「x は y が好き」
  ○ $\exists x \forall y\, L(x, y) \to \forall y \exists x\, L(x, y)$
  日本語「みんなを好きな人がいれば，みんにはその人を好きな人がいる　」
  × $\forall x \exists y\, L(x, y) \to \exists y \forall x\, L(x, y)$
  日本語「みんなに好きな人がいれば，みんなから好かれる人がいる　」

恒真と充足可能

- 充足可能
  - A の自由変数を $x_1, \cdots, x_n$ としたとき，A が充足可能であるとは
    - ある構造 $\mu = \langle U, \sigma \rangle$ と，ある要素 $u_1, \cdots u_n$ に対して $\mu \vDash A[u_1/x_1, \cdots u_n/x_n]$

- A が充足不可能であるための必要十分条件は $\neg A$ が恒真であること

冠頭標準形

- 冠頭論理式（prenex formula）
  - $Q_1, \cdots, Q_n$ を $\forall$ あるいは $\exists$ のいずれかとし，A を量化記号を一つも含まない論理式とするとき
$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \ A$$
  を冠頭論理式という

- $A \sim B$
  - $A \equiv B$ が恒真のとき，A と B は論理的に同値であると言い，$A \sim B$ と表す．
  - $\sim$ は同値関係になる．

- **定理**：任意の論理式 A に対し，ある冠頭論理式 A^+ が存在して，$A \sim A^+$ が成り立つ．

- 論理式 A に対して $A \sim A^+$ となる冠頭論理式 A^+ を A の冠頭標準形（prenex normal form）という．
  - 冠頭標準形は一意的に定まるとは限らない．

例

- 次の論理理式と論理的に同値な冠頭論理理式を求めなさい.

1. $(\exists y\, P(y) \vee Q(x)) \to \exists x\, R(x)$

   $\sim\ \exists y\big(P(y) \vee Q(x)\big) \to \exists x\, R(x)$ $\qquad A \vee \exists x\, B \equiv \exists x(A \vee B)$

   $\sim\ \forall y\big(P(y) \vee Q(x) \to \exists x\, R(x)\big)$ $\qquad \exists x\, B \to A \equiv \forall x(B \to A)$

   $\sim\ \forall y\, \exists z\big(P(y) \vee Q(x) \to R(z)\big)$ $\qquad A \to \forall x\, B \equiv \forall x(A \to B)$

2. $\exists x\, R(x,y) \to \forall y(P(y) \wedge \neg\forall z\, Q(z))$

   $\sim \exists x\, R(x,y) \to \forall y(P(y) \wedge \exists z \neg\, Q(z))$ $\qquad \neg\forall x\, B \equiv \exists x \neg B$

   $\sim \exists x\, R(x,y) \to \forall y\, \exists z(P(y) \wedge \neg\, Q(z))$ $\qquad A \wedge \exists x\, B \equiv \exists x(A \wedge B)$

   $\sim \forall x\, \forall u\, \exists z\, \big(R(x,y) \to\ P(u) \wedge \neg\, Q(z)\big)$

3. $\exists x\left(\forall y\big(P(y) \to Q(x,z)\big) \vee \exists z\big(\neg\exists u\, R(z,u) \wedge Q(x,z)\big)\right)$

   $\sim \exists x\left(\forall y\big(P(y) \to Q(x,z)\big) \vee \exists v\big(\neg\exists u\, R(v,u) \wedge Q(x,v)\big)\right)$

   $\sim \exists x\, \forall y\, \exists v\, \forall u\left(\big(P(y) \to Q(x,z)\big) \vee \big(\neg R(v,u) \wedge Q(x,v)\big)\right)$

まとめ

- 述語論理の意味
  - 対象領域
  - 解釈
  - 構造＝対象領域＋構造

- $\mu \vDash A$

- 恒真な論理式
  - 充足可能

- 冠頭標準形