

論理学

第10回「述語論理の証明」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

前回まで

• 命題論理

- 論理結合子 (\wedge , \vee , \rightarrow , \neg)
- 真理値表
- トートロジー
- 標準形
- 公理と証明
- LK体系とNK体系
- 健全性と完全性



• 述語論理

- 述語論理式 (言語, 項)
- 量化記号 ($\forall x P(x)$, $\exists x P(x)$)
- 閉じた論理式 (束縛変数, 自由変数)
- 述語論理の意味 (構造)
- 恒真な論理式
- 冠頭論理式

述語論理で書いてみよう

- 述語 S, P, J, M, L, T, H を以下のようにする.
 - $S(x)$ = 「 x はSFCの学生である. 」
 - $P(x)$ = 「 x はSFCの教員である. 」
 - $J(x)$ = 「 x はSFCの授業である. 」
 - $M(x)$ = 「 x は数学の授業である. 」
 - $L(x, y)$ = 「 x は y が好き. 」
 - $T(x, y)$ = 「 x は y の授業を取る. 」
 - $H(x)$ = 「 x は幸福である. 」
- 次の文章を述語論理式として書きなさい.
 1. SFCの学生は幸福である.
 2. SFCの授業はすべて数学である.
 3. SFCの学生は好きな授業を取る.
 4. SFCの学生は数学の授業を取らなくてはいけない.

つづき

5. SFCの学生は数学の授業が好き.
6. SFCには数学の授業が嫌いな学生がいる.
7. SFCの学生は数学の授業を取れば, 数学の授業を好きになる.
8. SFCに数学の授業が好きな学生がいれば, SFCの先生は幸福である.
9. SFC学生がみんな数学の授業を好きなら, SFCの先生は幸福である.

LK体系

- 式 (sequent) を用いる.

$$A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$$

- 意味: A_1, \dots, A_m のすべてを仮定したとき, B_1, \dots, B_n のどれかを導くことができる.
- 公理と構造に関する推論規則

$$\frac{}{A \vdash A} \text{ (I)}$$

$$\frac{}{\vdash \top} \text{ (T)}$$

$$\frac{}{\perp \vdash} \text{ (}\perp\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (WL)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (WR)}$$

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (CL)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (CR)}$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta} \text{ (EL)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2} \text{ (ER)}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (Cut)}$$

LK推論規則

- 論理結合子に関する推論規則

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L_1)$$

$$\frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L_2)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B} (\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} (\vee R_1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} (\vee R_2)$$

$$\frac{A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} (\vee L)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} (\rightarrow L)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg L)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} (\neg R)$$

述語論理のLK推論規則

- 命題論理の推論規則に以下の規則を追加する.

$$\frac{A[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\forall L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A[z/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A} \quad (\forall R)$$

- t は任意の項
- z は対象変数で, 下式のどの論理式 ($\Gamma, \Delta, \forall x A, \exists x A$) も自由に出現しないときにのみ適用可能 (この条件を**変数条件**という).
- z を**固有変数** (eigen variable) という

$$\frac{A[z/x], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\exists L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A} \quad (\exists R)$$

推論規則の適用例

- $P(x), Q(x), R(x, y)$ を述語とする.

$$\frac{P(\text{太郎}), \Gamma \vdash \Delta}{\forall x P(x), \Gamma \vdash \Delta} \quad (\forall L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(z)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x P(x)} \quad (\forall R)$$

$$\frac{P(z) \wedge Q(z), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x (P(x) \wedge Q(x)), \Gamma \vdash \Delta} \quad (\exists L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(\text{太郎}) \rightarrow R(\text{太郎}, \text{花子})}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x (P(x) \rightarrow R(x, \text{花子}))} \quad (\exists R)$$

- 次は変数条件を満たしていないので, 正しい適用ではない.

$$\frac{P(z) \vdash P(z)}{P(z) \vdash \forall x P(x)} \quad (\forall R)$$

$$\frac{P(z) \wedge Q(z) \vdash R(x, z)}{\exists x (P(x) \wedge Q(z)) \vdash R(x, z)} \quad (\exists L)$$

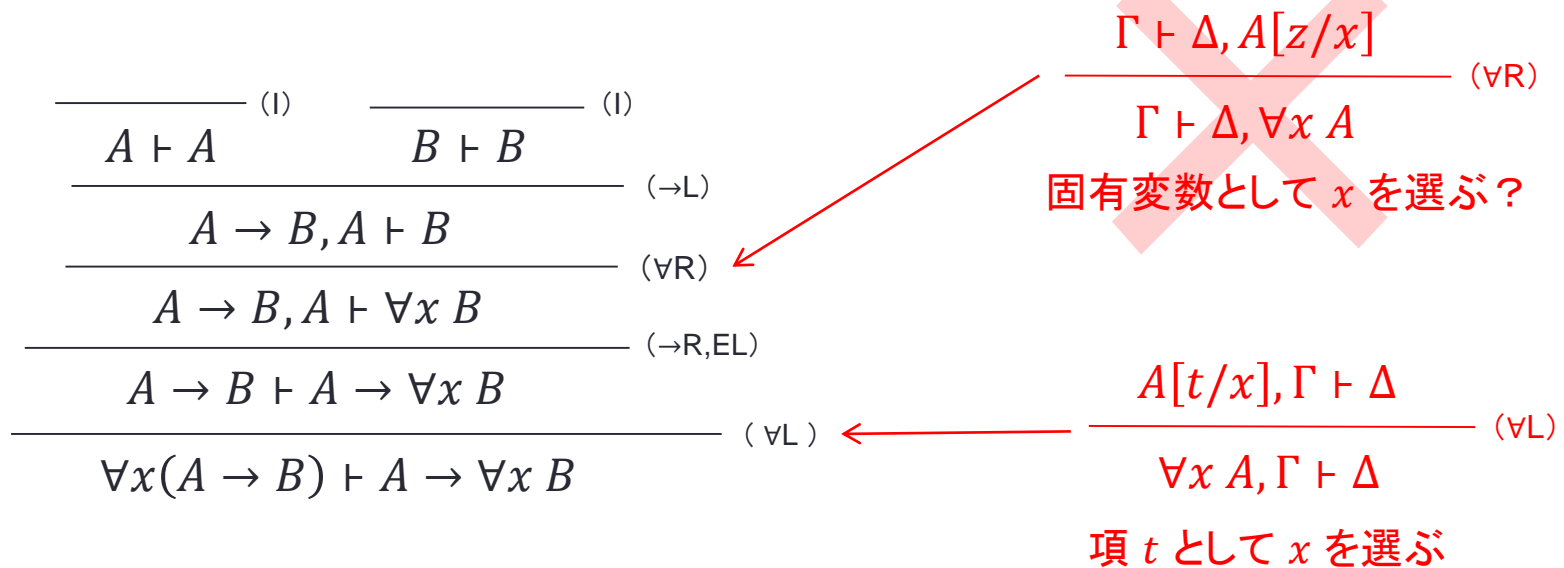
証明図

- $\forall x(A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow \forall x B$ (A に x は自由変数として現れない)

$\frac{\frac{\frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \quad \frac{}{B \vdash B} \text{ (I)}}{A \rightarrow B, A \vdash B} (\rightarrow\text{L})}{\forall x(A \rightarrow B), A \vdash B} (\forall\text{L})}{\forall x(A \rightarrow B), A \vdash \forall x B} (\forall\text{R})}{\forall x(A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow \forall x B} (\rightarrow\text{R,EL})$	$\frac{A[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta} (\forall\text{L})$ <p style="color: red;">項 t として x を選ぶ</p> <p style="color: red;">固有変数として x を選ぶ A に x は自由に出現していない</p> $\frac{\Gamma \vdash \Delta, A[z/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A} (\forall\text{R})$ <p style="color: red;">$B[x/x]$ は B</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

まちがった証明図

- $\forall x(A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow \forall x B$ (A に x は自由変数として現れない)



ソクラテスの証明

- ソクラテスの問題を証明しなさい。
 - $P(x)$ = 「 x は人間である」
 - $Q(x)$ = 「 x は死ぬ」
 - s をソクラテスを表す対象定数とする
- 大前提: 人間は死ぬ
 - $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
- 小前提: ソクラテスは人間である
 - $P(s)$
- 結論: ソクラテスは死ぬ
 - $Q(s)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{P(s) \vdash P(s)} \text{ (I)} \quad \frac{}{Q(s) \vdash Q(s)} \text{ (I)} \\
 \hline
 P(s) \rightarrow Q(s), P(s) \vdash Q(s) \quad (\rightarrow L) \\
 \hline
 \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), P(s) \vdash Q(s) \quad (\forall L)
 \end{array}$$

$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} (\rightarrow L)$
 $\frac{A[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta} (\forall L)$

次の論理式を証明しなさい(1)

- $\forall x B \wedge \forall x C \vdash \forall x(B \wedge C)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{B \vdash B} \text{ (I)} \qquad \frac{}{C \vdash C} \text{ (I)} \\
 \frac{}{\forall x B \vdash B} \text{ (\forall L)} \qquad \frac{}{\forall x C \vdash C} \text{ (\forall L)} \\
 \frac{}{\forall x B \wedge \forall x C \vdash B} \text{ (\wedge L}_1\text{)} \qquad \frac{}{\forall x B \wedge \forall x C \vdash C} \text{ (\wedge L}_2\text{)} \\
 \frac{}{\forall x B \wedge \forall x C \vdash B \wedge C} \text{ (\wedge R)} \\
 \frac{}{\forall x B \wedge \forall x C \vdash \forall x(B \wedge C)} \text{ (\forall R)}
 \end{array}$$

- $\forall x(B \wedge C) \vdash \forall x B \wedge \forall x C$

- $\forall x B \vee \forall x C \vdash \forall x(B \vee C)$

次の論理式を証明しなさい(2)

- $\neg \forall x B \vdash \exists x \neg B$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{B \vdash B} \text{ (I)} \\
 \frac{}{\vdash B, \neg B} \text{ (\neg R)} \\
 \frac{}{\vdash B, \exists x \neg B} \text{ (\exists R)} \\
 \frac{}{\vdash \exists x \neg B, B} \text{ (ER)} \\
 \frac{}{\vdash \exists x \neg B, \forall x B} \text{ (\forall R)} \\
 \frac{}{\neg \forall x B \vdash \exists x \neg B} \text{ (\neg L)}
 \end{array}$$

- $\exists x \neg B \vdash \neg \forall x B$

- $\exists x \forall y D \vdash \forall y \exists x D$

述語論理体系LKの証明に関する定理

- **cut除去定理**

- 式 $\Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能であれば、 $\Gamma \vdash \Delta$ に至るLKの証明図でcutを一度も用いないものが存在する.

- **証明の部分論理式に関する定理**

- 式 $\Gamma \vdash \Delta$ に至るcutなしの証明図において現れる論理式はすべて $\Gamma \vdash \Delta$ の論理式の部分論理式になっている.

- **述語論理の決定不能性**

- 与えられた式が述語論理体系LKで証明可能であるかどうかは決定不能である.
- すなわち、証明可能性を判断する有限の手続き(アルゴリズム)は存在しない.
- チャーチ(Alonzo Church)により証明される.

述語論理体系LKの健全性と完全性

• LKの健全性

- 任意の式 $\Gamma \vdash \Delta$ に対して, $\Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能であれば, $\Gamma \vdash \Delta$ は恒真である.
- 各推論規則において上式が恒真の時に, 下式も恒式であることを示せばよい.

• LKの完全性

- 任意の式 $\Gamma \vdash \Delta$ に対して, $\Gamma \vdash \Delta$ が恒真であれば, $\Gamma \vdash \Delta$ はLKで証明可能である.
- ゲーデル(Kurt Gödel)により証明される.
- ゲーデルの**完全性定理**

形式理論

- 言語 L の閉じた論理式の集合 T を**形式理論** (formal theory) という.
 - 式 $\Gamma \vdash \Delta$ が理論 T で証明可能である
 - $\iff T$ に属する有限個の論理式 B_1, \dots, B_n を適当に選ぶと, $B_1, \dots, B_n, \Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能
 - $T, \Gamma \vdash \Delta$
- T は真と信ずる論理式. 「公理的理論」の公理.
- T は**矛盾**する (inconsistent)
 - $T \vdash$
- T は**無矛盾**である (consistent)
 - T が矛盾しないとき
- T の**モデル** (model)
 - T を言語 L の理論で, μ を L に対する構造とすると, T の属するすべての論理式 A に対して $\mu \models A$ のとき, μ を T のモデルという.

等号の公理

- $=$ を言語 L の二変数の述語記号としたとき, 次の論理式の集まりを**等号の公理** (equality axiom) という.

1. $\forall x(x = x)$

2. $\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$

3. $\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$

4. L の m 変数の関数記号 f に対して

$$\forall x_1 \dots \forall x_m \forall y_1 \dots \forall y_m (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_m = y_m \rightarrow f(x_1, \dots, x_m) = f(y_1, \dots, y_m))$$

5. L の n 変数の述語記号 P に対して

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)))$$

- 今後は言語 L が等号を含めば, L 上の理論 T は常に等号の公理を含むものとする.

例：群の理論

- 言語 L は, 対象定数 e , 一変数関数記号 $^{-1}$, 二変数関数記号 \cdot と $=$ からなすとする. **群**の理論 T は等号の公理と以下の論理式からなる.
 - $\forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
 - $\forall x (e \cdot x = x \wedge x \cdot e = x)$
 - $\forall x (x \cdot x^{-1} = e \wedge x^{-1} \cdot x = e)$
- 任意の群 G に対して, 単位元を e に, 群の演算を \cdot に, 逆元を取る演算を $^{-1}$ に対応させる写像を I とすると, 構造 $\langle G, I \rangle$ は T のモデルになる.
- T のモデルの構造はひとつの群を自然に定めるため, 群 G と構造 $\langle G, I \rangle$ を同一視する.

強い形の完全性とコンパクト性定理

- 強い形の完全性
 - T を任意の理論とする. T が無矛盾であれば T はモデルを持つ.
- 強い形の完全性から完全性の証明
 - $\Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能でない.
 - $\neg C \vdash$ もLKで証明可能でない. ($\Gamma^* \rightarrow \Delta_*$ の閉包を C とする)
 - T を $\neg C$ のみからなる理論とすると, $\neg C \vdash$ がLKで証明可能でないことから, T は無矛盾.
 - 強い形の完全性から T はモデル μ を持つ.
 - $\mu \models \neg C$
 - $\mu \not\models C$
 - C は恒真ではなく, $\Gamma \vdash \Delta$ も恒真ではない.
- コンパクト性定理
 - T を任意の理論とする. T がモデルを持つための必要十分条件は T の任意の有限部分集合がモデルを持つことである.

述語論理のNK体系

- \forall の導入および除去規則

$$\frac{A[z/x]}{\forall x A} \quad (\forall I)$$

(z は固有変数)

$$\frac{\forall x A}{A[t/x]} \quad (\forall E)$$

- \exists の導入および除去規則

$$\frac{A[t/x]}{\exists x A} \quad (\exists I)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A[z/x]]_i \\ \vdots \\ \exists x A \quad C \end{array}}{C} \quad i \quad (\exists E)$$

(z は固有変数)

述語論理のヒルベルト論理体系

- 公理: 命題論理の公理に加えて次の2つを追加

$$A11. A[t/x] \rightarrow \exists x A$$

$$A12. \forall x A \rightarrow A[t/x]$$

- 推論規則: モーダスポネンスに加えて次の2つを追加

$$\frac{A \rightarrow C}{\exists x A \rightarrow C}$$

$$\frac{C \rightarrow A}{C \rightarrow \forall x A}$$

ただし x は C に自由変数としては出現しないものとする.

まとめ

- 述語論理の形式体系LK
 - 健全性と完全性
- 形式理論
 - 強い形の完全性
 - コンパクト性定理
- 述語論理の形式体系NK