論理学
第14回「いろいろな論理体系」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

lecture URL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

直観主義論理

- 20 世紀の数学
  - カントールの集合論「数学的思考はその自由性にある」
  - 数学的対象はその存在が矛盾をひき起こすものでない限り実際に存在するものと考える.
  - 19 世紀までの数学では，幾何学，整数，有理数，実数など，具体的なものを対象とした.
  - 20 世紀の数学では，群や体，位相空間，圏など抽象的な対象を扱う.
- 矛盾の克服
  - カントールの集合論にはラッセルのパラドックスのように矛盾を含んでいる.
  - 形式主義的な立場からは，公理に制限を入れることで克服しようとした.
  - これまでの数学の成果を失うことなく形式的に進めることが可能になった.
- 直観主義（intuitionism）
  - 数学的対象は人間が作り出すものであり，その存在は構成的な手続きで示さなくてはならない.
  - これまでの数学の一部の成果を失うことになるかも知れない.

対象が存在することの意味

- 古典論理では背理法を用いて存在を示していた.
  - 性質 P を持つ対象が存在しないと仮定すると矛盾する，だから P を持つ対象が存在しなければならない.

- 直観主義では背理法的な存在証明を認めない.
  - P をみたす対象の存在を示すには，その対象を見出すための有限の手続きを具体的に与えなくてはならない.

- 例「$x^y = z$ となる実数 x, y, z で，x とy が無理数で z が有理数であるものが存在する」を古典論理で証明してみる.
  - $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ を考えると，これは有理数か無理数のどちらかである.
  - $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数であれば，x と y を $\sqrt{2}$ とすれば $z = x^y$ は有理数である.
  - $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数であれば，x を$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ とし，y を $\sqrt{2}$ とすれば，$z = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$ となり有理数である.

- この証明では x, y, z に何をとったら良いか具体的に示していないので，直観主義的には認められない.

古典論理との違い

- 古典論理では $\exists x \forall y \bigl(P(y) \to P(x)\bigr)$ は恒真である.
  - ある a_0 について $P(a_0)$ が成り立てば，どんな b についても $P(b) \to P(a_0)$ が成り立つので，$\forall y \bigl(P(y) \to P(a_0)\bigr)$ が成り立つ.
  - もしどの c について $P(c)$ が成り立たないとすると，任意に選んだ d に対して，$P(c) \to P(d)$ が成り立つので，$\forall y \bigl(P(y) \to P(d)\bigr)$ が成り立つ.
  - どちらにしても，$\exists x \forall y \bigl(P(y) \to P(x)\bigr)$ が成り立つ.
  - 直観主義的には $\forall y (P(y) \to P(x))$ を真とする x として具体的に何をとれば良いのか分からないので，上記の証明は認められない.
- 二重否定は肯定?
  - $\neg\neg A \to A$ は古典論理では恒真
  - A を $\exists x\, P(x)$ とすると，$\neg\neg\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$
  - $\neg\neg\exists x\, P(x)$ は，「$P(x)$ となる x が存在しないとすると矛盾する」を意味する.
  - $\exists x P(x)$ は，直観主義では「$P(x)$ となる x が存在し，具体的に見つける方法がある」ことを意味する.
  - $\neg\neg\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$ は，直観主義的には「$P(x)$ となる x が存在しないとすると矛盾するなら，具体的に $P(x)$ となる x を見つける方法がある」ことを意味するため，直観主義的には正しくない.

排中律

- $A \vee B$
  - 直観主義では A が正しいと具体的にいえるか，B が正しいと具体的にいえる時に真と考える.

- 排中律
  - $A \vee \neg A$
  - 古典論理では恒真である.
  - 直観主義では一般には正しくない.

- ゴールドバッハ予想
  - 「任意の 4 以上の偶数は 2 つの素数の和として表される」
  - 非常に大きな偶数までこの予想が正しいことが認められているが，まだ証明されていない
  - $P(n) =$「$2(n+2)$ は 2 つの素数の和として表すことができない」
  - $\exists x\, P(x) \vee \neg\exists x\, P(x)$ は直観主義的には，正しいとはまだ証明されていない.

構成的数学とプログラム

- 構成的数学（constructive mathematics）
  - 直観主義に基づく数学の再構成
  - 背理法を用いない
  - 構成的な概念と構成的な証明の基づいた数学の再構成

- プログラム
  - 問題の解に対して具体的な計算方法を示す
  - プログラムがその問題に関する証明
  - 例
    - 「任意の2 つの自然数 m, n に対して，最大公約数が存在する」
    - ユークリッドの互除法は最大公約数が存在することの証明

- プログラム=証明
  - 論理式の構成的証明からプログラムを抽出することができる

直観主義論理の体系

- 直観主義論理体系LJ
  - 古典論理体系LK と同じ始式および規則
  - ただし，LJ における式は，$A_1, \ldots, A_m \vdash B$ に限る（m は 0 でも構わなく，B はなくても良い）

- 公理と構造に関する推論規則

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\mathrm{I}) \qquad \frac{}{\vdash \top}\ (\top) \qquad \frac{}{\bot \vdash}\ (\bot)$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{A, \Gamma \vdash B}\ (\mathrm{WL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\ (\mathrm{WR}) \qquad \frac{A, A, \Gamma \vdash B}{A, \Gamma \vdash B}\ (\mathrm{CL})$$

$$\frac{\Gamma_1, A, A', \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_1, A', A, \Gamma_2 \vdash B}\ (\mathrm{EL}) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A \qquad A, \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash B}\ (\mathrm{Cut})$$

（ここで Γ は論理式の列，B は空またはただ一つの論理式）

直観主義論理の推論規則

- 論理結合子に関する推論規則

$$\frac{A, \Gamma \vdash C}{A \wedge B, \Gamma \vdash C}\ (\wedge L_1) \qquad \frac{B, \Gamma \vdash C}{A \wedge B, \Gamma \vdash C}\ (\wedge L_2) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A \qquad \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \wedge B}\ (\wedge R)$$

$$\frac{A, \Gamma_1 \vdash C \qquad B, \Gamma_2 \vdash C}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash C}\ (\vee L) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee R_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee R_2)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \qquad B, \Gamma_2 \vdash C}{A \to B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash C}\ (\to L) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\neg A, \Gamma \vdash}\ (\neg L) \qquad \frac{A[t/x], \Gamma \vdash B}{\forall x\, A, \Gamma \vdash B}\ (\forall L) \qquad \frac{A[z/x], \Gamma \vdash B}{\exists x\, A, \Gamma \vdash B}\ (\exists L)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg R) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[z/x]}{\Gamma \vdash \forall x\, A}\ (\forall R) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x\, A}\ (\exists R)$$

直観主義論理に関する定理

- cut 除去定理
  - 式 $\Gamma \vdash A$ がLJ で証明可能であれば, $\Gamma \vdash A$ に至るLJ の証明図でcut を一度も用いないものが存在する.
- 直観主義命題論理の決定性
  - 与えられた式が命題論理の形式体系LJ で証明可能か否かを判定する有限の手続きが存在する.
- 直観主義述語論理の決定不能性
  - 与えられた式が述語論理の形式体系LJ で証明可能か否かを有限の手続きで判定する方法は存在しない.
- 直観主義述語論理のdisjunction property
  - 形式体系LJ で論理式 $A \vee B$ が証明可能ならば, A か B のいずれかがLJ で証明可能である.
- 直観主義述語論理のexistence property
  - 形式体系LJ で論理式$\exists x\, A$ が証明可能ならば, ある項 t が存在して$A[t/x]$ がLJ で証明可能である.

様相論理

- 様相論理（modal logic）
  - 日常のもの事は状況や場面において真偽が変わる.
  - 「三角形の内角の和は $180°$ である」は状況や場面に関わらず真である.
  - 「エレベータは3 階にある」は，現在エレベータがどこにあるかの状況によって変わり，将来的にも真偽値は変わるかも知れない.
  - ある文が事実として正しいことと，それが必然的に正しいことを区別する
- 様相論理の論理式
  - $\Box A$
    - 必然的に A である.
  - $\neg\Box A$
    - A は必然的ではない.
  - $\Box\neg A$
    - A でないことは必然的である（A である可能性はない）.
  - $\neg\Box\neg A$
    - A である可能性がある.
    - $\Diamond A$ と省略して書く.

様相論理の体系

- 体系K
  - 古典命題論理のsequent計算の体系LKに次の推論規則を追加した体系

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Box\Gamma \vdash \Box A}$$

- K において次の式は証明可能である
  - $\Box A \wedge \Box B \vdash \Box(A \wedge B)$
  - $\Box(A \wedge B) \vdash \Box A \wedge \Box B$
  - $\Box A \vee \Box B \vdash \Box(A \vee B)$
  - $\Box(A \to B) \vdash \Box A \to \Box B$

様相論理の公理

- 様相論理では，いくつかの公理を始式として加える．
  - D: $\Box A \to \Diamond A$
  - T: $\Box A \to A$
  - 4: $\Box A \to \Box\Box A$
  - B: $A \to \Box\Diamond A$
  - 5: $\Diamond A \to \Box\Diamond A$

- 様相論理S4
  - 体系Kに公理Tと4を加えたもの．

- 様相論理S5
  - 体系Kに公理Tと5を加えたもの．

- 公理型間の関係
  - KB4 と KB5 は同じ様相論理である．
  - KDB4 と KDB5 と S5 は同じ様相論理である．

様相演算に対する意味づけ

- $\Box A$ の時間の流れにおける解釈
  - A が「いつも」正しい時に，$\Box A$ は正しい．

- 「いつも」の解釈が「未来はいつも」のとき
  - 公理型T：$\Box A \to A$ は成り立たない（現在 A は成り立たないから）．

- 「いつも」の解釈が「現在および未来はいつも」のとき
  - 公理型T：$\Box A \to A$ は正しい
  - 公理型4：$\Box A \to \Box\Box A$ も正しい
  - 公理型5：$\Diamond A \to \Box\Diamond A$ は成り立たない

- 「いつも」の解釈が「過去，現在および未来はいつも」のとき
  - 公理型5：$\Diamond A \to \Box\Diamond A$は正しい

- 様相論理のセマンティクス（クリプキのセマンティックス）
  - 可能世界の集合とその到達可能性の関係を用いて，可能世界ごとの真偽定める．
  - $\Box A$ が可能世界 a で真であるとは，a から到達可能な世界 b すべてで A が真であるという意味とする

直観主義論理と様相論理の関係

- ゲーデル変換あるいはマッキンゼイ･タルスキ変換 T
  - $T(p) = \Box p$
  - $T(A \wedge B) = T(A) \wedge T(B)$
  - $T(A \vee B) = T(A) \vee T(B)$
  - $T(A \to B) = \Box(T(A) \to T(B))$
  - $T(\neg A) = \Box\neg T(A)$

- ゲーデル･マッキンゼイ･タルスキの定理
  - 命題論理の論理式のからなる式 $\Gamma \vdash A$ が直観主義論理LJで証明可能となる必要十分条件は $T(\Gamma) \to T(A)$ が様相論理S4で証明可能となることである.

時制論理

- 時制論理（tense logic）または時間論理（temporal logic）
  - 時間的な意味における様相論理の をさらに細かく分解
  - $[P]A$ ＝「過去においていつも A」
  - $[F]A$ ＝「未来においていつも A」
  - $\langle P\rangle A = \neg[P]\neg A$ 　　$\langle F\rangle A = \neg[F]\neg A$
  - $\Box A = [P]A \wedge A \wedge [F]A$ 　　$\Diamond A = \langle P\rangle A \vee A \vee \langle F\rangle A$

- 体系 Kt
  - $A \rightarrow [P]\langle F\rangle A$ 　　$A \rightarrow [F]\langle P\rangle A$
  - $[P]A \rightarrow [P][P]A$ 　　$[F]A \rightarrow [F][F]A$
  - $\dfrac{\Gamma \vdash A}{[P]\Gamma \vdash [P]A}$ 　　$\dfrac{\Gamma \vdash A}{[F]\Gamma \vdash [F]A}$

- 追加の様相演算
  - $\bigcirc A$ ＝「つぎの時点でA」
  - $A \,\mathcal{U}\, B$ =「B になるまではA」

内包論理

- 内包論理（intentional logic）
  - $\Box A$ を「必然的にA」と解釈してきたが，それ以外のいろいろな解釈もありえる．
- 義務論理（deontic logic）
  - $\Box A$ を「A である義務がある」と解釈する．
  - $\Diamond A$ は「A であることは許される」と解釈する．
  - KDを用い，$\Box A \to \Diamond A$ は「A である義務があるなら A である可能性がある」は成り立つと考える．
  - T の $\Box A \to A$ は「A である義務があるなら A である」は一般には導かれないと考える．
- 知識と信念の論理（logic of knowledge, logic of belief）
  - $\Box A$ を「A であることを知っている」と解釈する．
- 証明可能性の論理（provability logic）
  - $\Box A$ を「A が証明可能である」と解釈する．
  - ゲーデルの第二不完全性定理「無矛盾であれば，無矛盾であることは証明できない」は
    - $\neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot$

ダイナミック論理

- ダイナミック論理（dynamic logic）
  - プログラムの仕様記述や正当性の検証で用いる.

  - プログラム Π に対して $[\Pi]A$ は「プログラム Π の実行後において論理式 A が成り立つ」ことを表す.

  - $\Pi_1;\Pi_2$ を Π_1 の後で Π_2 を実行, Π^* を Π を有限回繰り返し実行を意味するとする.
    - $[\Pi_1;\Pi_2]A \ \equiv \ [\Pi_1][\Pi_2]A$
    - $[\Pi^*]A \rightarrow (A \wedge [\Pi][\Pi^*]A)$
    - $(A \rightarrow [\Pi]A) \rightarrow (A \rightarrow [\Pi^*]A)$

資源の論理

- 資源の論理（resource logic）
  - 直観主義論理体系LJ の推論規則のweakeningとcontraction を許さない体系

$$\cancel{\frac{\Gamma \vdash B}{A, \Gamma \vdash B}} \text{（WL）} \qquad \cancel{\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}} \text{（WR）} \qquad \cancel{\frac{A, A, \Gamma \vdash B}{A, \Gamma \vdash B}} \text{（CL）}$$

  - 論理記号 $A \otimes B$ を導入

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash C}{\Gamma_1, A \otimes B, \Gamma_2 \vdash C} \text{（WL）} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A \quad \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \otimes B} \text{（WR）}$$

- 例: $A =$「500 円を支払う」, $B =$「文庫本1冊が買える」, $C =$「コーヒー1杯が飲める」
  - $A \vdash B$ と $A \vdash C$ から, $A \otimes A \vdash B \otimes C$ が証明可能
  - $A \vdash B \otimes C$ は証明可能ではない
  - $A \vdash B \wedge C$ は証明可能

その他の論理の話題

- 二階述語論理および高階述語論理
  - 一階述語論理では量化記号は対象領域を動く変数に対してのみ用いることができる.
  - 二階述語論理では量化記号を述語(対象領域の部分集合)の変数にも用いることができる.
  - 三階述語論理では対象領域の部分集合全体の集合の部分集合を動く変数に対して量化記号を用いることができる.
  - 一般にn階述語論理を定義することができ, すべての総称が高階述語論理.
- 3値論理とファジー論理
  - 真と偽の2値ではなく, その真中の値を考えた論理が3値論理.
  - 真と偽の間が連続であり, 付値を0から1の連続関数と考えるのがファジー論理.
- 非単調論理(non-monotonic logic)
  - 単調性: 新しい知識が増えることで, すでに存在する知識が減ることはない.
  - 「鳥は一般に飛ぶことはできる」しかし「ペンギンは飛ぶことができない」

まとめ

- 数理論理学
  - 命題論理
    - 論理結合子
  - 述語論理
    - 量化記号

- 論理体系
  - 証明と定理
  - LK体系，NK体系
  - 健全性と完全性

- 導出原理
  - 標準形
  - 節