

情報数学

第 10 回 完全半順序

萩野 達也

慶應義塾大学環境情報学部

2015/12/8

完全半順序

- 計算
 - フローチャートプログラム
 - Turing 機械
 - 帰納的関数
 - λ 計算
- λ 式
 - 関数の抽象化と適用のモデル
 - どんな関数?
 - $\lambda x.xx$
 - x は関数でもあり値でもある?

λ 計算のモデル

- λ 式のモデル

- $\Lambda = \{\lambda \text{ 式の集合} \}$
- $\llbracket \cdot \rrbracket : \Lambda \longrightarrow D$
- $\llbracket \lambda x.M \rrbracket = \lambda x.\llbracket M \rrbracket : D \longrightarrow D$

- D の性質

- $\psi : (D \longrightarrow D) \longrightarrow D$
- $\phi : D \longrightarrow (D \longrightarrow D)$
- $\psi(\phi(x)) = x, \phi(\psi(x)) = x$

- $D \stackrel{\sim}{=} D \longrightarrow D$

- D は集合ではありえない

情報の数学的性質 1

- 情報には大小関係がある
 - 「SFC は神奈川県にある」
 - 「SFC は関東にある」
 - 「SFC は藤沢市にある」
 - 情報は比較できる
- 数字の大小と同じ？
 - 「SFC は神奈川県にある」
 - 「SFC は慶応大学のキャンパスである」
 - すべての情報同士が比較できるわけではない

順序関係

- $\sqsubseteq$ が集合 D 上の順序関係 $\iff$
 - 反射的 (reflective): $x \sqsubseteq x$
 - 推移的 (transitive): $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq z$ ならば $x \sqsubseteq z$
 - 反対称 (antisymmetry): $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq x$ ならば x と y は等しい
 - 上記 3 つを満たす場合, 半順序 (partial order) という
 - 情報は半順序集合である
- 全順序 (total order) ではない
 - 完全性 (totalness): $x \sqsubseteq y$ または $y \sqsubseteq x$ である

順序集合はどれ?

- 自然数と $\leq$
- 自然数と $<$
- 整数と $\leq$
- 集合の部分集合関係 $\subseteq$
- ジャンケン
- 家系図の先祖関係
- 親子関係
- 兄弟姉妹関係
- 友達の友達

情報の数学的性質 2

- 情報には最小の情報がある
 - なにもない情報
 - なにも知らない
- $\perp$ が最小元である $\iff$
 - どんな x に対しても, $\perp \sqsubseteq x$
- 次の順序集合の最小限は?
 - (自然数, $\leq$)
 - (整数, $\leq$)
 - (部分集合の集合, $\subseteq$)
 - 先祖関係

最大元は?

- $\top$ が最大元である $\iff$
 - どんな x に対しても, $x \sqsubseteq \top$
- 最大の情報
 - なんでもかんでも
 - すべての情報をあわせたもの
 - わけが分からない
 - 矛盾

情報の数学的性質 3

- 2つの情報をあわせる
 - (1) 「SFC は藤沢市にある」
 - (2) 「SFC は慶応大学のキャンパス」
 - (3) 「SFC は藤沢市にある慶応大学のキャンパス」
 $(1) \sqsubseteq (3)$ $(2) \sqsubseteq (3)$
- (3) は (1) と (2) の上限

上限 (least upper bound)

- u は x と y の上限 $\iff$
 - $x \sqsubseteq u, y \sqsubseteq u$
 - $x \sqsubseteq z$ かつ $y \sqsubseteq z$ となる z に対して, $u \sqsubseteq z$
- $x \sqcup y$ と書く
- x と y より大きい元の中で一番小さいもの
- 上限は 1 つだけ
- 上限は何?
 - 自然数
 - 集合
 - 先祖関係

完備束 (complete lattice)

- 集合 A の上限 $\sqcup A \iff$
 - すべての $x \in A$ に対して, $x \sqsubseteq \sqcup A$
 - z が, すべての $x \in A$ に対して $x \sqsubseteq z$ となるなら, $\sqcup A \sqsubseteq z$
- $\sqcup\{x, y\} = x \sqcup y$
- A の上限と A の最大元は異なる
- どんな集合 A に対しても上限が存在する $\iff$ 完備束 (complete lattice)
- 完備束の例をあげよ

完備束の性質

- 完備束には必ず最小元がある
- 上限だけでなく, どんな集合 A に対しても下限が存在する
- 集合 A の下限 $\sqcap A \iff$
 - すべての $x \in A$ に対して, $\sqcap A \sqsubseteq x$
 - z が, すべての $x \in A$ に対して $x \sqsubseteq z$ となるなら, $z \sqsubseteq \sqcap A$
- 完備束は最大元も持つ

情報の集合は束か?

完全半順序 (complete partial order)

- 半順序集合 $(D, \sqsubseteq)$ が完全半順序 $\iff$
 - 最小元 $\perp$ がある
 - $x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \dots$ となる無限列に対して上限 $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} x_i$ がある
- すべてに上限があるわけではなく、関連している元の列に対して上限がある.
- 最大元があるとは限らない

情報の集合は完全半順序である

完全半順序の例

- (自然数, $\leq$)
- 部分集合の関係
- 先祖関係
- 平坦領域 (flat domain)
 - 集合 S に最小元 $\perp$ を追加
 - $x \in S$ に対して, $\perp \sqsubseteq x$ の関係だけを定義
 - 真偽値の集合 $B = \{\mathbf{tt}, \mathbf{ff}\}$ の平坦領域

$$B_{\perp} = \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{tt} & \mathbf{ff} \\ & \diagdown \quad \diagup \\ & \perp \end{array} \right\}$$

プログラムは関数?

- プログラムは完全半順序間の関数
- $\perp, \sqsubseteq, \sqcup$ はどうする
 - (1) $f(\perp) = \perp$
 - (2) $x \sqsubseteq y$ ならば, $f(x) \sqsubseteq f(y)$
 - (3) $x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \dots$ のとき,

$$f\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} x_i\right) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} f(x_i)$$

- (2) と (3) を満たす時, f は連続 (continuous) であるという
- (1) を満たす時, 正格 (strict) であるという

プログラムは連続関数である

最小元の正体

- 最小元の意味は?
 - なにもない情報
 - 無の情報
 - メモリがクリアされた状態
 - 計算の最初
 - まだ計算されていない
- プログラムが $\perp$ を返す意味
 - 答がでない. 無理.
 - いくら計算しても止まらない
 - 未定義
- プログラムに $\perp$ を渡す意味
 - なにも情報がありませんが、計算して!
 - これを使ってはいけませんよ
- 正格な関数とは?
- プログラムはつねに正格か?

連続関数の例

- $B = \{\mathbf{tt}, \mathbf{ff}\}$
- $\text{not} : B_{\perp} \rightarrow B_{\perp}$
 - $\text{not}(\perp) = \perp$
 - $\text{not}(\mathbf{tt}) = \mathbf{ff}$
 - $\text{not}(\mathbf{ff}) = \mathbf{tt}$
- $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- $\text{add1} : N_{\perp} \rightarrow N_{\perp}$
 - $\text{add1}(\perp) = \perp$
 - $\text{add1}(n) = n + 1 \ (n \neq \perp)$

まとめ

- 完全半順序
 - 情報の集合
 - 半順序
 - 最小元
 - 上限
- 連続関数
 - 上限を保存する
 - 正格な関数
 - $\perp$ の意味