情報数学
第8回　完全半順序

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

スライドURL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

これまで

- 計算
  - フローチャート
  - whileプログラム
  - 帰納的関数
    - 原始帰納的関数
    - 最小解演算子
  - Turing機械
    - 決定不能問題
  - ラムダ計算
    - 関数抽象
    - 関数適用
    - λ 表現

- λ 式
  - 関数抽象と適用をモデル
  - どんな関数なのか？
  - $\lambda x.xx$
  - x は関数であり値でもある.

フローチャート

‖

whileプログラム

‖

帰納的関数

‖

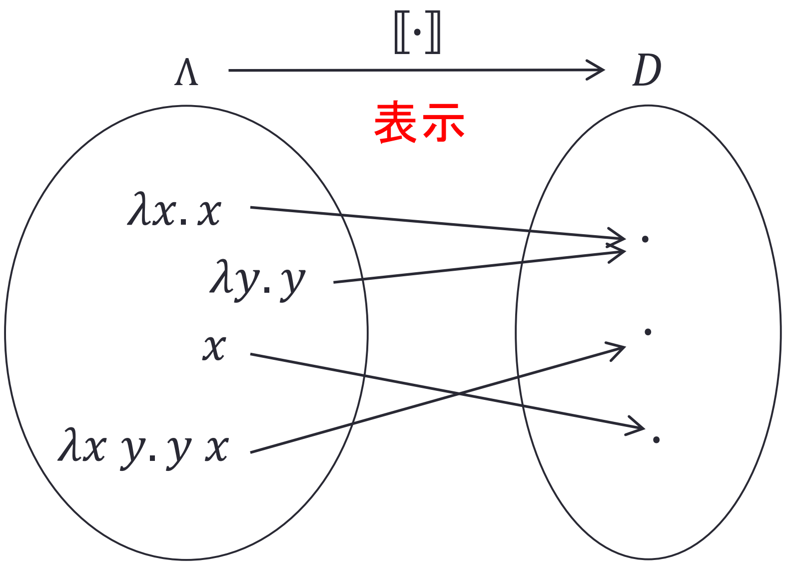
Turing機械

‖

ラムダ計算

ラムダ計算のモデル

- λ式のモデル
  - $\Lambda = \{M \mid M$ はλ式$\}$
  - M の意味
    - $[\![M]\!]$
    - M の表示(denotation)
  - $[\![\cdot]\!]: \Lambda \to D$
    - λ式に意味(D の値)を対応させる.
    - $[\![\lambda x. M]\!] = \lambda x. [\![M]\!]$
    - $[\![MN]\!] = [\![M]\!]([\![N]\!])$



- D の性質
  - $[\![\lambda x. M]\!] \in D \to D$
    - $D \to D \subseteq D$
  - $[\![MN]\!] = [\![M]\!]([\![N]\!])$
    - $D \subseteq D \to D$
- すなわち,
  - $D \cong D \to D$
  - D の要素は関数である.
  - 1点集合以外に存在しない.

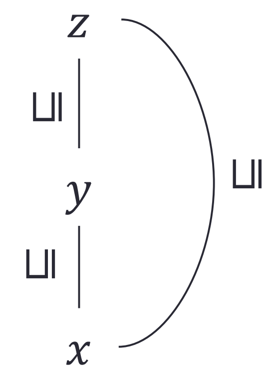
情報の数学的性質1

- 情報には大小関係がある.
  - 「SFCは神奈川県にある」
  - 「SFCは関東にある」
  - 「SFCは藤沢市にある」

- 数字の大小と同じ？
  - 「SFCは神奈川県にある」
  - 「SFCは慶応大学のキャンパスである」

- すべての情報同士が比較できるわけではない.

順序関係



- $\sqsubseteq$ が集合 D 上の順序関係:
  - 反射律(reflective): $x \sqsubseteq x$
  - 推移律(transitive): $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq z$ ならば $x \sqsubseteq z$
  - 反対称律(antisymmetric): $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq x$ ならば $x = y$
- $(D, \sqsubseteq)$ は半順序集合(partially ordered set)である
  - $\sqsubseteq$ は半順序
- 情報は半順序集合である.
  - 全順序集合(totally ordered set)ではない.
  - 完全性(totality): $x \sqsubseteq y$ あるいは $y \sqsubseteq x$ のどちらかが成り立つ.
- 半順序集合であるのはどれ?
  - 自然数の $x \leq y$
  - 整数の $x \leq y$
  - 自然数の $x < y$
  - 集合の包含関係の $A \subseteq B$
  - 友達関係

情報の数学的性質2

- 情報には最小の情報がある.
  - なにもない情報
  - なにも知らない
- $\perp$ が**最小元**である:
  - どんな x に対しても $\perp \sqsubseteq x$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, dash, "\sqsupseteq"'] \\ \perp \end{tikzcd}$$

- 次の半順序集合の最小元は？
  - 自然数の $x \leq y$
  - 整数の $x \leq y$
  - 集合の包含関係の $A \subseteq B$

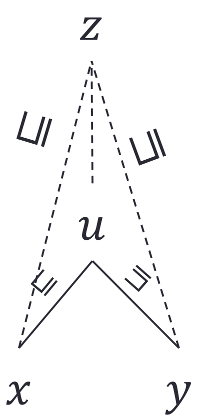
最大元は?

- $\top$ が最大元である:
  - どのような x に対しても $x \sqsubseteq \top$

- 最大の情報とは？
  - なんでもかんでも
  - すべての情報をあわせたもの
  - わけが分からない
  - 矛盾

情報の数学的性質3

- 複数の情報をあわせる.
  - ①「SFCは藤沢市にある」
  - ②「SFCは慶應大学のキャンパスである」
  - ③「SFCは藤沢市にある慶應大学のキャンパスである」
  - ① ⊑ ③　かつ　② ⊑ ③
- ③は①と②の上限になっている.
- u が x と y の上限（least upper bound）であるとは:
  - $x \sqsubseteq u$　かつ　$y \sqsubseteq u$
  - もし z が $x \sqsubseteq z$ かつ $y \sqsubseteq z$ を満たすなら, $u \sqsubseteq z$ である.
  - $x \sqcup y$ と書く.
  - x と y より大きい要素の中で最も小さいもの.
  - 上限は存在すれば一意的.



- 次の半順序集合において上限とは何か？
  - 自然数の $x \leq y$
  - 集合の包含関係の $A \subseteq B$

完備束（Complete Lattice）

- $\sqcup A$ が集合 A の上限であるとは:
  - $x \in A$ に対して $x \sqsubseteq \sqcup A$
  - もし z がすべての $x \in A$ に対して $x \sqsubseteq z$ となるなら, $\sqcup A \sqsubseteq z$

- $\sqcup \{x, y\} = x \sqcup y$

- A の上限と A の最大元は異なる.
  - $\{ 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \ldots \}$
  - A の最大元は A の要素でなくてはならない.

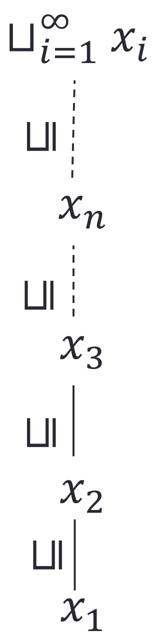
- $(D, \sqsubseteq)$ が完備束（complete lattice）であるとは:
  - 任意の集合 A の上限 $\sqcup A$ が存在する.

完備束の性質

- 完備束には必ず最小元がある.
  - $\bot = \sqcup \emptyset$
- 完備束は任意の集合の下限(greatest lower bound)がある.
  - $\sqcap A$ が集合 A の下限であるとは:
    - 任意の $x \in A$ に対して $\sqcap A \sqsubseteq x$
    - もし z が任意の $x \in A$ に対して $z \sqsubseteq x$ となれば, $z \sqsubseteq \sqcap A$
  - $\sqcap A = \sqcup \{z \in D|$ 任意の$x \in A$ に対して $z \sqsubseteq x\}$
- 完備束には必ず最大元がある.
  - $\top = \sqcap \emptyset$
- 情報の集合は完備束か？

完全半順序集合（Complete Partial Ordered Set）

- 半順序集合 $(D, \sqsubseteq)$ が完全半順序集合（complete partial ordered set, cpo）であるとは:
  - 最小元 $\bot$ がある.
  - $x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq x_n \sqsubseteq \cdots$, となる要素列に対して上限 $\sqcup_{i=1}^{\infty} x_i$ がある.
- 最大元があるとは限らない.
- 情報の集合は完全半順序集合である.



例

- 集合の包含関係 $A \subseteq B$
- 完備束

- 平坦領域（flat domain）:
  - 集合 S に最小元 $\perp$ を追加する.
    - $x \in S$ に対して $\perp \sqsubseteq x$
  - 平坦領域は完全半順序集合である.
  - 真偽値の集合 $B = \{\mathrm{tt}, \mathrm{ff}\}$ の平坦領域は:

$$B_\perp = \left\{ \begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{tt} \arrow[dr, dash] & & \mathrm{ff} \arrow[dl, dash] \\ & \perp & \end{tikzcd} \right\}$$

プログラムは関数である

- プログラムは，完全半順序間の関数である．

- 関数は $\bot$, $\sqsubseteq$, $\sqcup$ に対してどうする？

  (1) $f(\bot) = \bot$

  (2) $x \sqsubseteq y$ ならば $f(x) \sqsubseteq f(y)$

  (3) $x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \cdots$ に対して $f(\sqcup_{i=1}^{\infty} x_i) = \sqcup_{i=1}^{\infty} f(x_i)$

- f が(2)を満たすとき，f は単調(monotonic)関数である．
- f が(2)と(3)を満たすとき，f は連続(continuous)関数である．
- f が(1)を満たすとき，f は正格(strict)である．

- プログラムは連続である．

最小元の正体

- 最小元 ⊥ の意味は？
  - 情報がない
  - メモリはクリアされた状態
  - 計算の最初
  - まだ計算が始まっていない
- プログラムが ⊥ を返す意味：
  - 答えがない.
  - 計算が終わらない.
  - 結果は未定義である.
- プログラムに ⊥ を渡す意味：
  - なにも情報がないが計算して！
  - この値を使うな.
- 正格な関数とは？
  - プログラムは常に正格か？

連続関数の例

- $B = \{\mathrm{tt}, \mathrm{ff}\}$
- $\mathrm{not}: B_\perp \to B_\perp$
  - $\mathrm{not}(\mathrm{tt}) = \mathrm{ff}$
  - $\mathrm{not}(\mathrm{ff}) = \mathrm{tt}$
  - $\mathrm{not}(\perp) = \perp$

- $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- $\mathrm{add1}: N_\perp \to N_\perp$
  - $\mathrm{add1}(n) = n + 1$
  - $\mathrm{add1}(\perp) = \perp$

- 単調
  - $\perp \sqsubseteq \mathrm{ff}$ にたいして $\mathrm{not}(\perp) \sqsubseteq \mathrm{not}(\mathrm{ff})$
  - $\perp \sqsubseteq \mathrm{tt}$ にたいして $\mathrm{not}(\perp) \sqsubseteq \mathrm{not}(\mathrm{tt})$
- 連続
  - $\perp \sqsubseteq \perp \sqsubseteq \perp \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq \perp \sqsubseteq \mathrm{ff} \sqsubseteq \mathrm{ff} \sqsubseteq \cdots$ にたいして
    - $\mathrm{not}(\perp) \sqsubseteq \mathrm{not}(\perp) \sqsubseteq \mathrm{not}(\perp) \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq \mathrm{not}(\perp) \sqsubseteq \mathrm{not}(\mathrm{ff}) \sqsubseteq \mathrm{not}(\mathrm{ff}) \sqsubseteq \cdots$

まとめ

- 完全半順序
  - 情報の集合
  - 半順序
  - 最小元
  - 上限

- 連続関数
  - 上限を保存する
  - 正格とは？