

情報数学

第9回 完全半順序とデータ型

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

スライドURL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

完全半順序集合

- 半順序集合 $(D, \sqsubseteq)$ が**完全半順序** (complete partial ordered set, cpo) となるのは,
 - 最小元 $\perp$ がある.
 - $x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq x_n \sqsubseteq \dots$ となる無限列に対して, 上限 $\sqcup_{i=1}^{\infty} x_i$ がある.

情報の集合

$\subseteq$

完全半順序集合

平坦領域 (flat domain)

- 集合 S に最小元 $\perp$ を追加する.

- $x \in S$ に対して $\perp \sqsubseteq x$

- 例:

- 真偽値の集合 $B = \{\text{tt}, \text{ff}\}$ の平坦領域は,

$$B_{\perp} = \left[\begin{array}{cc} \text{tt} & \text{ff} \\ & \perp \end{array} \right]$$

- 自然数の集合 $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ の平坦領域は,

$$N_{\perp} = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ & & & \perp & & \end{array} \right]$$

直積 (product)

- CPO D_1 と D_2 の直積 $D_1 \times D_2$ とは,
 - $D_1 \times D_2 = \{\langle x, y \rangle \mid x \in D_1, y \in D_2\}$
 - $\langle x, y \rangle \sqsubseteq \langle x', y' \rangle \Leftrightarrow x \sqsubseteq x' \text{ かつ } y \sqsubseteq y'$
- $D_1 \times D_2$ はCPOである.
 - 上記の $\sqsubseteq$ は半順序になっている.
 - $\perp_{D_1 \times D_2} = \langle \perp_{D_1}, \perp_{D_2} \rangle$
 - $\langle x_1, y_1 \rangle \sqsubseteq \langle x_2, y_2 \rangle \sqsubseteq \langle x_3, y_3 \rangle \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq \langle x_i, y_i \rangle \sqsubseteq \cdots$ に対して,

$$\sqcup_{i=1}^{\infty} \langle x_i, y_i \rangle = \langle \sqcup_{i=1}^{\infty} x_i, \sqcup_{i=1}^{\infty} y_i \rangle$$

直積の例

- $B_{\perp} \times B_{\perp}$ ハッセ図を描きなさい.
- $(B_{\perp} \times B_{\perp}) \times B_{\perp}$

真偽値に関する関数

- $\text{not}: B \rightarrow B$

	ff	tt
not		

- $\text{not}_\perp: B_\perp \rightarrow B_\perp$

	$\perp$	ff	tt
$\text{not}_\perp$			

- $\text{and}: B \times B \rightarrow B$

and	ff	tt
ff		
tt		

- $\text{or}: B \times B \rightarrow B$

or	ff	tt
ff		
tt		

or の連続関数への拡張

- $\text{or}_\perp: B_\perp \times B_\perp \rightarrow B_\perp$

$\text{or}_\perp$	$\perp$	ff	tt
$\perp$			
ff		ff	tt
tt		tt	tt

- $\text{or}_R: B_\perp \times B_\perp \rightarrow B_\perp$

or_R	$\perp$	ff	tt
$\perp$			
ff		ff	tt
tt		tt	tt

- $\text{or}_L: B_\perp \times B_\perp \rightarrow B_\perp$

or_L	$\perp$	ff	tt
$\perp$			
ff		ff	tt
tt		tt	tt

- $\text{or}_P: B_\perp \times B_\perp \rightarrow B_\perp$

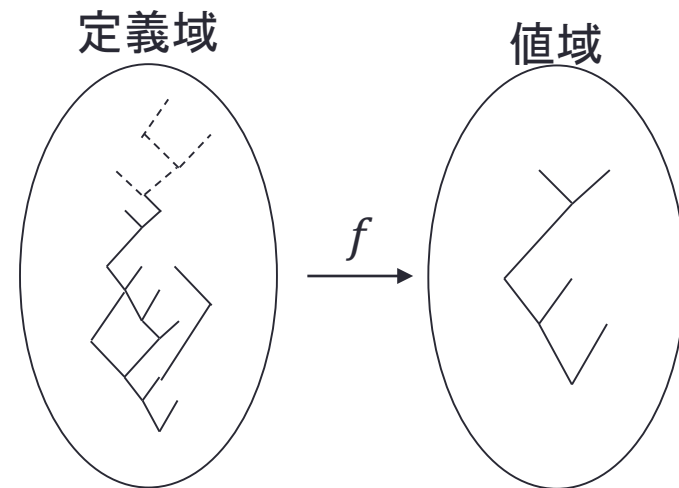
or_P	$\perp$	ff	tt
$\perp$			
ff		ff	tt
tt		tt	tt

条件関数

- $\text{cond}: B_{\perp} \times N_{\perp} \times N_{\perp} \rightarrow N_{\perp}$
 - $\text{cond}(\perp, x, y) = \perp$
 - $\text{cond}(\text{tt}, x, y) = x$
 - $\text{cond}(\text{ff}, x, y) = y$

連続関数の性質

- 値域の階数が有限であるとき,
 - 単調であれば連続である.



- $f: D_1 \times D_2 \rightarrow D_3$ が連続である $\Leftrightarrow$
 - $b \in D_2$ に対して $f_b: D_1 \rightarrow D_3$ が連続である.

$$f_b(x) = f(x, b)$$
 - $a \in D_1$ に対して $f^a: D_2 \rightarrow D_3$ が連続である.

$$f^a(y) = f(a, y)$$

直積に関連する連続関数

• 射影 (projection)

- $\pi_1: D_1 \times D_2 \rightarrow D_1$
 - $\pi_1(\langle x, y \rangle) = x$
- $\pi_2: D_1 \times D_2 \rightarrow D_2$
 - $\pi_2(\langle x, y \rangle) = y$

$$\begin{array}{c}
 x \xleftarrow{\quad} \bullet \langle x, y \rangle \bullet \xrightarrow{\quad} y \\
 \\
 D_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\iota_1} \end{array} D_1 \times D_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_2} \\ \xleftarrow{\iota_2} \end{array} D_2 \\
 \\
 x \bullet \xrightarrow{\quad} \langle x, \perp_{D_2} \rangle \quad \langle \perp_{D_1}, y \rangle \bullet \xleftarrow{\quad} y
 \end{array}$$

• 埋め込み (injection, embedding)

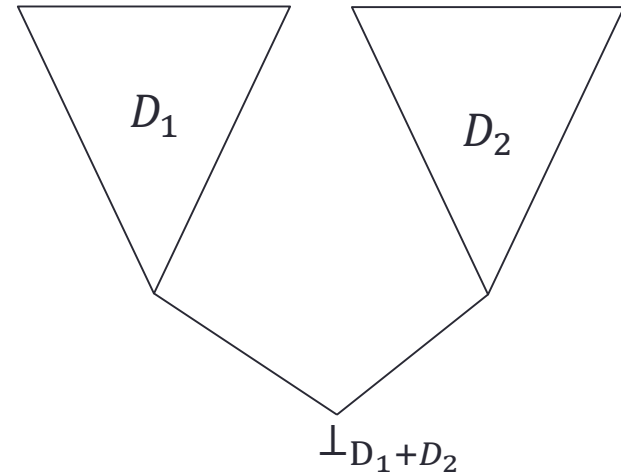
- $\iota_1: D_1 \rightarrow D_1 \times D_2$
 - $\iota_1(x) = \langle x, \perp_{D_2} \rangle$
- $\iota_2: D_2 \rightarrow D_1 \times D_2$
 - $\iota_2(y) = \langle \perp_{D_1}, y \rangle$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \bullet \iota_1 \circ \pi_1(z) \sqsubseteq z \\
 \bullet \iota_2 \circ \pi_2(z) \sqsubseteq z \\
 \bullet \pi_1 \circ \iota_1(x) = x \\
 \bullet \pi_2 \circ \iota_1(x) = \perp_{D_2} \\
 \bullet \pi_1 \circ \iota_2(y) = \perp_{D_1} \\
 \bullet \pi_2 \circ \iota_2(y) = y
 \end{array} \right.$$

直和 (co-product)

- CPO D_1 と D_2 の直和 $D_1 + D_2$ とは,

- $D_1 + D_2 = \{\langle x, 1 \rangle \mid x \in D_1\} \cup \{\langle y, 2 \rangle \mid y \in D_2\} \cup \{\perp_{D_1+D_2}\}$
 - $\langle x, 1 \rangle \sqsubseteq \langle x', 1 \rangle \Leftrightarrow x \sqsubseteq x'$
 - $\langle y, 2 \rangle \sqsubseteq \langle y', 2 \rangle \Leftrightarrow y \sqsubseteq y'$
 - $\perp_{D_1+D_2} \sqsubseteq \langle x, 1 \rangle$
 - $\perp_{D_1+D_2} \sqsubseteq \langle y, 2 \rangle$



- $D_1 + D_2$ はCPOである.

- 上記 $\sqsubseteq$ は半順序になっている.
- $\perp_{D_1+D_2}$ が最小元.
- 上昇数列は D_1 あるいは D_2 の中に閉じたもののなので上限がある.

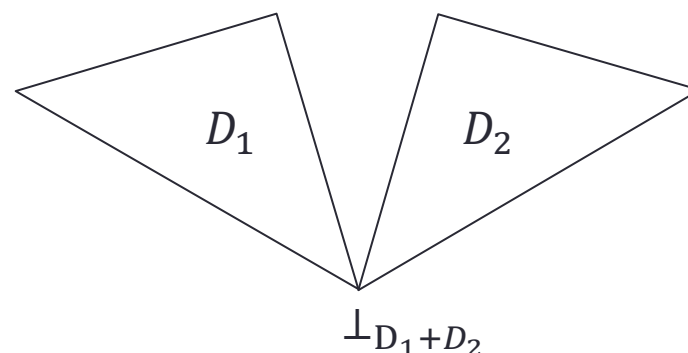
直和の例

• $B_{\perp} + B_{\perp}$ ハッセ図を描きなさい.

• $(B_{\perp} + B_{\perp}) + B_{\perp}$

もう一つの直和 (smashed co-product)

- CPO D_1 と D_2 のsmashed co-product $D_1 \oplus D_2$ とは,
 - $D_1 \oplus D_2 = \{\langle x, 1 \rangle \mid x \in D_1, x \neq \perp_{D_1}\} \cup \{\langle y, 2 \rangle \mid y \in D_2, y \neq \perp_{D_2}\} \cup \{\perp_{D_1+D_2}\}$
 - $\langle x, 1 \rangle \sqsubseteq \langle x', 1 \rangle \Leftrightarrow x \sqsubseteq x'$
 - $\langle y, 2 \rangle \sqsubseteq \langle y', 2 \rangle \Leftrightarrow y \sqsubseteq y'$
 - $\perp_{D_1+D_2} \sqsubseteq \langle x, 1 \rangle$
 - $\perp_{D_1+D_2} \sqsubseteq \langle y, 2 \rangle$



直和に関する連続関数

射影 (projection)

- $\pi_1: D_1 + D_2 \rightarrow D_1$
 - $\pi_1(\langle x, 1 \rangle) = x$
 - $\pi_1(\langle y, 2 \rangle) = \perp_{D_1}$
 - $\pi_1(\perp_{D_1+D_2}) = \perp_{D_1}$
- $\pi_2: D_1 + D_2 \rightarrow D_2$
 - $\pi_2(\langle x, 1 \rangle) = \perp_{D_2}$
 - $\pi_2(\langle y, 2 \rangle) = y$
 - $\pi_2(\perp_{D_1+D_2}) = \perp_{D_2}$

$$\begin{array}{ccccc}
 x & \xleftarrow{\quad \bullet \quad} & \langle x, 1 \rangle & & \langle y, 2 \rangle \xrightarrow{\quad \bullet \quad} y \\
 \\
 D_1 & \xleftarrow[\iota_1]{\pi_1} & D_1 + D_2 & \xleftarrow[\iota_2]{\pi_2} & D_2 \\
 \\
 x & \xrightarrow{\quad \bullet \quad} & \langle x, 1 \rangle & & \langle y, 2 \rangle \xleftarrow{\quad \bullet \quad} y
 \end{array}$$

埋め込み (injection, embedding)

- $\iota_1: D_1 \rightarrow D_1 + D_2$
 - $\iota_1(x) = \langle x, 1 \rangle$
 - $\iota_1(\perp_{D_1}) = \perp_{D_1+D_2}$
- $\iota_2: D_2 \rightarrow D_1 + D_2$
 - $\iota_2(y) = \langle y, 2 \rangle$
 - $\iota_2(\perp_{D_2}) = \perp_{D_1+D_2}$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \bullet \quad \iota_1 \circ \pi_1(z) \sqsubseteq z \\
 \bullet \quad \iota_2 \circ \pi_2(z) \sqsubseteq z \\
 \bullet \quad \pi_1 \circ \iota_1(x) = x \\
 \bullet \quad \pi_2 \circ \iota_1(x) = \perp_{D_2} \\
 \bullet \quad \pi_1 \circ \iota_2(y) = \perp_{D_1} \\
 \bullet \quad \pi_2 \circ \iota_2(y) = y
 \end{array} \right.$$

関数空間 (function space)

- CPO D_1 から D_2 への関数空間 $[D_1 \rightarrow D_2]$ とは,
 - $[D_1 \rightarrow D_2] = \{f: D_1 \rightarrow D_2 \mid f \text{ は連続である}\}$
 - $f \sqsubseteq f' \iff x \in D_1 \text{ に対して } f(x) \sqsubseteq f'(x)$
- $[D_1 \rightarrow D_2]$ はCPOである.
 - 上記の $\sqsubseteq$ は半順序になっている.
 - $\perp_{[D_1 \rightarrow D_2]}(x) = \perp_{D_2}$
 - $f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq f_3 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq f_i \sqsubseteq \dots$ に対して,

$$(\sqcup_{i=1}^{\infty} f_i)(x) = \sqcup_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

- 射影と埋め込み

- $\pi : [D_1 \rightarrow D_2] \rightarrow D_2$
- $\pi(f) = f(\perp)$
- $\iota : D_2 \rightarrow [D_1 \rightarrow D_2]$
- $\iota(y)(x) = y$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \iota \circ \pi(f) \sqsubseteq f \\ \bullet \pi \circ \iota(y) = y \end{array} \right.$$

射影と埋め込み

- $D_1 \triangleleft D_2$
 - $\pi : D_2 \rightarrow D_1$ 射影
 - $\iota : D_1 \rightarrow D_2$ 埋め込み
 - $\iota \circ \pi(y) \sqsubseteq y$ $\iota \circ \pi \sqsubseteq id_{D_2}$
 - $\pi \circ \iota(x) \sqsupseteq x$ $\pi \circ \iota \sqsupseteq id_{D_1}$
- 直積: $D_1 \times D_2$
 - $D_1 \triangleleft D_1 \times D_2$
 - $D_2 \triangleleft D_1 \times D_2$
- 直和: $D_1 + D_2$
 - $D_1 \triangleleft D_1 + D_2$
 - $D_2 \triangleleft D_1 + D_2$
- 関数空間: $[D_1 \rightarrow D_2]$
 - $D_2 \triangleleft [D_1 \rightarrow D_2]$

不動点定理

- **定理:** 連続関数 $f: D \rightarrow D$ は最小不動点を持つ.

- f の不動点 $u \Leftrightarrow f(u) = u$

- **証明:**

- $\perp \sqsubseteq f(\perp) \sqsubseteq f(f(\perp)) \sqsubseteq f^3(\perp) \sqsubseteq \dots \sqsubseteq f^i(\perp) \sqsubseteq \dots$

- $\sqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\perp)$ が最小不動点である.

- $f\left(\sqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\perp)\right) = \sqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\perp)$

- 任意の不動点 $u = f(u)$ に対して

- $f^i(\perp) \sqsubseteq u$ であるから $\sqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\perp) \sqsubseteq u$.

- $\text{fix}: [D \rightarrow D] \rightarrow D$

- $\text{fix}(f) = \sqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\perp)$

- これも連続

不動点意味論

- 再帰プログラムは分かりにくい？
 - $\text{fact}(x) \equiv \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x \times \text{fact}(x - 1)$
- $\text{fact}: N_{\perp} \rightarrow N_{\perp}$
 - $\text{fact} = \lambda x. \text{cond}(x = 0, 1, x \times \text{fact}(x - 1))$
 - fact は次の関数 F の不動点
 - $F: [N_{\perp} \rightarrow N_{\perp}] \rightarrow [N_{\perp} \rightarrow N_{\perp}]$
 - $F(f) = \lambda x. \text{cond}(x = 0, 1, x \times f(x - 1))$
 - fact を F の最小不動点として理解する.
 - $F(\perp) =$
 - $F^2(\perp) =$
 - $F^3(\perp) =$
 - $\vdots$
 - $\text{fix}(F) = \sqcup_{n=0}^{\infty} F^n(\perp)$

$$\text{fact} = \text{fix}(F) = \sqcup_{n=0}^{\infty} F^n(\perp)$$

- $F(f) = \lambda x. \text{cond}(x = 0, 1, x \times f(x - 1))$
- $F(\perp) =$
- $F^2(\perp) =$

$$\text{fact} = \text{fix}(F) = \sqcup_{n=0}^{\infty} F^n(\perp)$$

- $F^3(\perp) =$
- $F^n(\perp) =$
- $F^{n+1}(\perp) =$
- $\text{fact} = \sqcup_{n=0}^{\infty} F^n(\perp) =$

宿題

- 次のふたつの再帰プログラムの不動点意味論を計算しなさい.
 - $f(x) \equiv \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } f(x - 1) + 1$
 - $g(x) \equiv \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } g(x) + 1$
- 提出方法
 - SOLの課題提出から, PDF形式で提出しなさい.
 - f と g がそれぞれどんな関数 F と G の不動点となるかをまず示し, それぞれの最小不動点を, fact と同じように $\sqcup_{n=0}^{\infty} F^n(\perp)$ と $\sqcup_{n=0}^{\infty} G^n(\perp)$ を計算して示しなさい.
 - 締め切り: 12月12日土曜日

まとめ

- 領域
 - 平坦領域
 - 直積
 - 直和
 - 関数空間
- 不動点
 - 不動点定理
 - 不動点意味論