情報数学
第10回　圏論

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

スライドURL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

集合論

- 集合論
  - 現代数学の基礎
  - 集合 ≡ ある性質を持った要素を集めたもの
    - $\emptyset$
    - $A \cup B$
    - $A \cap B$
    - A^c
    - $\{x \in A \mid x$ に関する論理式$\}$
  - 要素に関する記述が重要：すなわち，いつ $x \in A$ なのか

- 集合論の限界
  - ラッセルのパラドックス
  - 集合の集合は集合ではない．
  - $R = \{x \mid x \notin x\}$
  - $R \in R$ か $R \notin R$ か?

圏論（カテゴリー理論）

- 集合論に代わる基礎理論
- Abstract Nonsenseともいわれる
- 中身の記述ではなく，他との関係で表す

集合論	圏論
$x \in A$	$A \to B$
中身に対する記述	外からの記述
中身	他との関係

- バラバラだった概念を統一的に扱うことが可能になる
- 対称性を見出しやすい

圏

- 圏 C は次のものからなる:
  - **対象**(object)の集まり: $\boldsymbol{C} = \{A, B, C, \dots\}$
  - 対象 A と B に対して, A から B への**射**(arrow, morphism)の集まり: $\hom_{\boldsymbol{C}}(A, B) = \{f, g, h, \dots\}$
    - $f \in \hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ のとき $f : A \to B$ と書く
    - A は f の**定義域**(domain)
    - B は f の**値域**(codomain, range)

$$\boldsymbol{C}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "k"] & C \\ {} \arrow[u, "h"] & & {} \end{tikzcd}$$

圏（つづき）

- 圏 $\boldsymbol{C}$ は次の条件を満たさなくてはならない：
  - $f: A \to B$ および $g: B \to C$ のとき
    $g \circ f: A \to C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

  - $f: A \to B$, $g: B \to C$, $f: C \to D$ のとき
    $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "h \circ g"'] \\ D \arrow[u, shift left, "h \circ (g \circ f)"'] \arrow[u, shift right, "(h \circ g) \circ f"] & C \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

  - 対象 A にたいして射 $1_A: A \to A$ があり，
    $f: A \to B$ に対して
    $f \circ 1_A = f$ および $1_B \circ f = f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_B \circ f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\ A \arrow[u, "1_A"] \arrow[ur, "f \circ 1_A"] & B \end{tikzcd}$$

圏の例

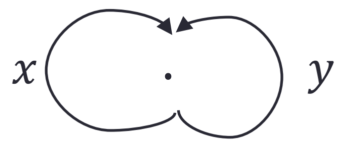
- ***Set***: 集合の圏
  - 対象: 集合
  - 射: 関数
  - $\circ$: 関数の合成
  - 1_A: A の恒等関数
- ***Grp***: 群の圏
  - 対象: 群 $(G,\ \cdot, e,\ \ ^{-1})$
  - 射: 群の準同型
  - $\circ$: 関数の合成
  - 1_A: A の恒等関数
- ***CPO***: 完全半順序集合の圏
  - 対象: 完全半順序集合
  - 射: 連続関数
  - $\circ$: 関数の合成
  - 1_A: A の恒等関数

$(G,\ \cdot, e,\ \ ^{-1})$: 群
- $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
- $x\cdot e=e\cdot x=x$
- $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=e$

準同型: $f\colon G\to H$
- $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$

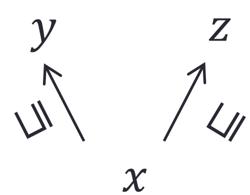
圏の例

- 半群 $(M, \cdot, e)$ 自身
  - 対象:1つの要素のみ
  - 射:半群の要素 M
  - $\circ$:半群の演算 $\cdot$
  - 1:単位元 e



$(M, \cdot, e)$:半群
- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- $x \cdot e = e \cdot x = x$

- 半順序集合 $(D, \sqsubseteq)$ 自身
  - 対象:D の要素
  - 射: $\sqsubseteq$（射 $x \to y$ は高々1つ）
  - $\circ$:「$x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq z$ ならば $x \sqsubseteq z$」
  - 1_x:「$x \sqsubseteq x$」

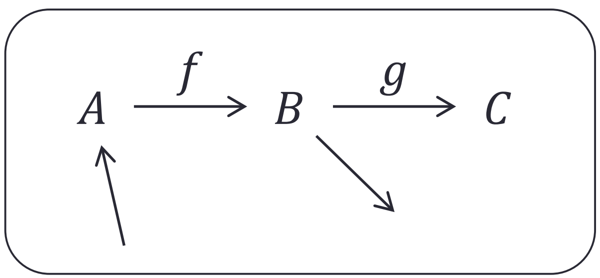


$(D, \sqsubseteq)$:半順序集合
- $x \sqsubseteq x$
- $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq z$ ならば $x \sqsubseteq z$
- $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq x$ ならば $x = y$

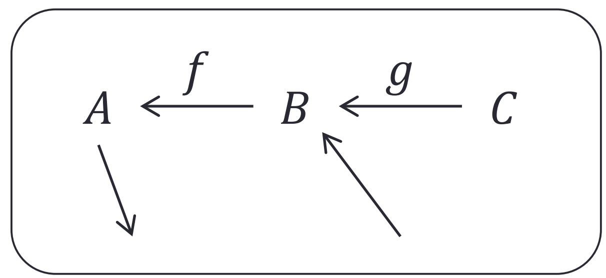
双対圏

- 圏 $\boldsymbol{C}$ の双対圏 $\boldsymbol{C}^{op}$ を次のように定義する
  - $\boldsymbol{C}^{op}$ の対象 = $\boldsymbol{C}$ の対象
  - $\boldsymbol{C}^{op}$ の射 $\hom_{\boldsymbol{C}^{op}}(A, B) = \hom_{\boldsymbol{C}}(B, A)$ $\boldsymbol{C}$ の射
  - 射の向きを反対にする

$\boldsymbol{C}$



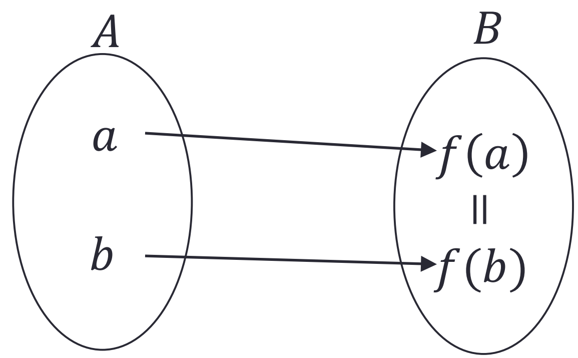
$\boldsymbol{C}^{op}$



- 圏 $\boldsymbol{C}$ で成り立つことは，双対圏 $\boldsymbol{C}^{op}$ でも成り立つ.
  - $(\boldsymbol{C}^{op})^{op} = \boldsymbol{C}$

単射

- **一対一写像**（one-to-one）
  - 写像 $f\colon A \to B$ が一対一写像である
    $\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ ならば $a = b$ である.

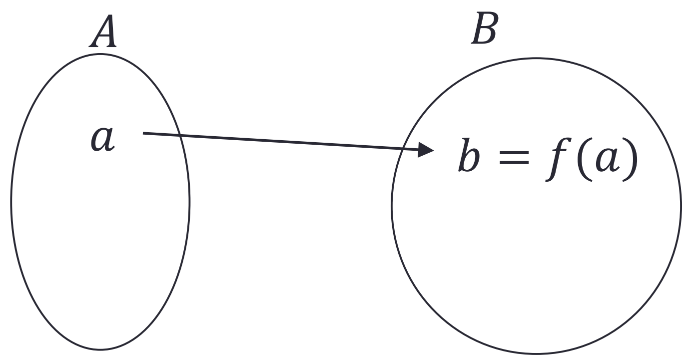


- **単射**（mono）
  - $f\colon A \to B$ が単射である
    $\Leftrightarrow$ 任意の対象 D と射 $g\colon D \to A$ および $h\colon D \to A$ に対して，$f \circ g = f \circ h$ ならば $g = h$.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "g"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

全射

- 上への写像（onto）
  - 写像 $f: A \to B$ が上への写像である
    - $\Leftrightarrow$ 任意の要素 $b \in B$ に対して $a \in B$ が存在して $f(a) = b$ となる.



- **全射**（epi）
  - $f: A \to B$ が全射である

    $\Leftrightarrow$ 任意の対象 D と射 $g: B \to D$ および $h: B \to D$ に対して, if $g \circ f = h \circ f$ ならば $g = h$.

$$A \xrightarrow{f} B \underset{g}{\overset{h}{\rightrightarrows}} D$$

単射と全射

- **単射**（mono）
  - $f: A \to B$ が単射である
    $\Leftrightarrow$ 任意の対象 D と射 $g: D \to A$ および $h: D \to A$ に対して，$f \circ g = f \circ h$ ならば $g = h$.

$$D \underset{g}{\overset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

$\boldsymbol{C}^{op}$ の単射は $\boldsymbol{C}$ の全射

- **全射**（epi）
  - $f: A \to B$ が全射である
    $\Leftrightarrow$ 任意の対象 D と射 $g: B \to D$ および $h: B \to D$ に対して，if $g \circ f = h \circ f$ ならば $g = h$.

$$A \xrightarrow{f} B \underset{g}{\overset{h}{\rightrightarrows}} D$$

$\boldsymbol{C}^{op}$ の全射は $\boldsymbol{C}$ の単射

同型

- **同型**（isomorphic, iso）
  - 対象 A と B は同型である

    $\Leftrightarrow$ 射 $f: A \to B$ と $g: B \to A$ があり, $g \circ f = 1_A$ および $f \circ g = 1_B$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

> 同型な対象は $\boldsymbol{C}$ では同じ役割を果たす

始対象と終対象

- 始対象(initial object) I
  - すべての対象 A に対して唯一の射が存在する

$$I \overset{!}{\dashrightarrow} A$$

- 終対象(final object) F
  - すべての対象 A から唯一の射が存在する

$$A \overset{!}{\dashrightarrow} F$$

- **定理**:始対象は存在すれば同型を除いてユニークである.
- **双対な定理**:終対象は存在すれば同型を除いてユニークである.

	始対象	終対象
Set		
Grp		
CPO		
半順序集合		

直積と直和

- $A \times B$ は A と B の直積(product) $\Leftrightarrow$
  - 射 $\pi_1 : A \times B \to A$ と $\pi_2 : A \times B \to B$ が存在する
  - 任意の対象 C と射 $f : C \to A$, $g : C \to B$ に対して，次の図を可換にする射 $h : C \to A \times B$ が唯一存在する

- $A + B$ は A と B の直和(co-product) $\Leftrightarrow$
  - 射 $\iota_1 : A \to A + B$ と $\iota_2 : B \to A + B$ が存在する
  - 任意の対象 C と射 $f : A \to C$, $g : B \to C$ に対して，次の図を可換にする射 $h : A + B \to C$ が唯一存在する

$$
\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "!h"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\pi_1 \circ h = f \qquad \pi_2 \circ h = g$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "f"'] & A + B \arrow[d, dashed, "!h"] & B \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}
$$

$h \circ \iota_1 = f \qquad h \circ \iota_2 = g$

直積と直和

	直積	直和
Set	• $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ かつ $y \in B\}$ • $\pi_1\big((x, y)\big) = x$ • $\pi_2\big((x, y)\big) = y$ • $f: C \to A$ および $g: C \to B$ のとき $h(z) = \big(f(z), g(z)\big)$	• $A + B = \{(x, 1) \mid x \in A\} \cup \{(y, 2) \mid y \in B\}$ • $\iota_1(x) = (x, 1)$ • $\iota_2(y) = (y, 2)$ • $f: A \to C$ および $g: B \to C$ のとき $h\big((x, 1)\big) = f(x)$, $h\big((y, 2)\big) = g(y)$
半順序集合 $(D, \sqsubseteq)$	• $x \times y = x \sqcap y$ • $\pi_1: x \sqcap y \sqsubseteq x$ • $\pi_2: x \sqcap y \sqsubseteq y$ • $f: z \sqsubseteq x$ および $g: z \sqsubseteq y$ のとき $h: z \sqsubseteq x \sqcap y$	• $A + B = x \sqcup y$ • $\iota_1: x \sqsubseteq x \sqcup y$ • $\iota_2: y \sqsubseteq x \sqcup y$ • $f: x \sqsubseteq z$ および $g: y \sqsubseteq z$ のとき $h: x \sqcup y \sqsubseteq z$

- **定理**: 直積 $A \times B$ は存在すれば，同型を除いてユニークである.
- **双対の定理**: 直和 $A + B$ は存在すれば，同型を除いてユニークである.

まとめ

- 圏論(カテゴリー理論)
  - 数学の基礎理論の一つ

- 圏(カテゴリー)
  - 対象
  - 射

- 特別な対象
  - 始対象と終対象
  - 直積と直和