探索的モデリング (第５回)

井庭崇
iba@sfc.keio.ac.jp

1　ベイジアンネットワークにおける推論

確率推論システムの基本的なタスクは、証拠ノードの値が与えられたときに、質問ノードの事後確率分布を計算すること。このタスクを、「信念更新」(belief updting) または「確率推論」(probabilistic inference) という。

ベイジアンネットのネットワーク構造によって、適用するアルゴリズムは異なる。単純なツリー構造のベイジアンネットでの推論は、局所的な計算とノード間のメッセージ・パッシングで計算できる。ネットワーク上の２つのノードが複数の経路で結合されている場合 (複結合の場合) には、より複雑なアルゴリズムが必要になる。ネットワークによっては、計算が実時間内では不可能なことがあり、近似計算が必要となる。

2　前提となる知識・復習

2.1　ベイズの定理

$$P(h|e) = \frac{P(e|h)P(h)}{P(e)}$$

いくつかの証拠 e に条件付けられている仮説 h の確率は、尤度 (見込み) $P(e|h)$ に、証拠が得られる前の事前確率 $P(h)$ を掛けて、$P(e)$ で割って正規化したものに等しい (すべての仮説についての条件付き確率を足すと 1 になる)。

2.2　独立性

$$X \perp\!\!\!\perp Y \qquad \equiv \qquad P(X|Y) = P(X)$$

2.3　条件付き独立性

$$X \perp\!\!\!\perp Y|Z \qquad \equiv \qquad P(X|Y,Z) = P(X|Z)$$

条件付き独立性は、私たちが事象 Z から、Y から X について知ることができる以上に多くのことを知ることができるならば、Z を知った後には、Y を知ることは情報的には意味がない。

2.4　条件付き確率の連鎖法則

３つの事象 A、B、C が与えられたとき、条件付確率が定義されているとすると、

$$P(C|A) = P(C|B)P(B|A) + P(C|\neg B)P(\neg B|A)$$

この法則により、A にもとづく C の確率推論を、他の変数の状態 (ここでは B) を橋渡しとして、分割することができる。

2.5 CPT (Conditional Probability Table)

各行は条件ごとの各ノードの値の条件付き確率。

3 単結合ベイジアンネット：2ノードのネットワーク

最も単純なベイジアンネット、つまり2つのノードからなるベイジアンネットを考えてみよう。

$$X \rightarrow Y$$

3.1 親ノードに関する証拠がある場合

まず、親ノードについての証拠 $(X = x)$ がある場合をみてみる。Y の事後確率 (または信念) を $Bel(Y)$ と書くことにすると、これは $P(Y|X = x)$ のことであり、CPT の値から直接的に読み取ることができる。

3.2 子ノードに関する証拠がある場合

子ノードについての証拠 $(Y = y)$ がある場合は、X についての信念を更新する推論は、ベイズの定理の簡単な適用で行うことができる。

$$\begin{aligned} Bel(X = x) &= P(X = x|Y = y) \\ &= \frac{P(Y = y|X = x)P(X = x)}{P(Y = y)} \\ &= \alpha P(x)\lambda(x) \end{aligned}$$

ここで、

$$\alpha = \frac{1}{P(Y = y)}$$

$P(x)$ は事前確率、$\lambda(x) = P(Y = y|X = x)$ は尤度 (見込み)。X の値のすべての信念を足すと 1 になることから、α を正規化定数 (normalizing constant) という。式からもわかるように、私たちは、証拠の事前確率 $P(y)$ を知る必要はない。

3.3 例：インフルエンザ→高熱

インフルエンザ (Flu) が高熱 (HighTemp) を引き起こすという簡単なモデル。

$$
\begin{aligned}
X &\rightarrow Y \\
\text{インフルエンザ } (Flu) &\rightarrow \text{高熱 } (HighTemp)
\end{aligned} \tag{1}
$$

- 事前確率： $P(Flu = T) = 0.05$
- CPT 値： $P(HighTemp = T|Flu = T) = 0.9$、$P(HighTemp = T|Flu = F) = 0.2$。

■ある人が高熱であることがわかっているとき ($HighTemp = T$)、インフルエンザ (Flu) である確率はどの程度か、診断推論 (diagnostic inference) を行いなさい。

4　単結合ベイジアンネット：３ノードのネットワーク

３つの連鎖的なネットワークでも、同じ方法を適用できる。

$$X \to Y \to Z$$

もし根ノードについての証拠 $X = x$ が得られているなら、弧（アーク）と同じ向きに、条件付き確率の連鎖法則を適用することで信念の更新ができる。このとき、ネットワークに暗に示されている独立性を用いている。

$$Bel(Z) = P(Z|X = x) = \sum_{Y=y} P(Z|Y)P(Y|X = x)$$

葉ノード (木構造をなす階層構造で 終端のノード) についての証拠 $Z = z$ が得られているなら、ベイズの定理と連鎖法則を用いて、$Bel(X)$ を得るための診断推論 (diagnostic inference) が行われる。

$$\begin{aligned}
Bel(X = x) &= P(X = x|Z = z) \\
&= \frac{P(Z = z|X = x)P(X = x)}{P(Z = z)} \\
&= \frac{\sum_{Y=y} P(Z = z|Y = y, X = x)P(Y = y|X = x)P(X = x)}{P(Z = z)} \\
&= \frac{\sum_{Y=y} P(Z = z|Y = y)P(Y = y|X = x)P(X = x)}{P(Z = z)} (Z \perp\!\!\!\perp X|Y) \\
&= \alpha P(x)\lambda(x) \qquad (2)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\lambda(x) = P(Z = z|X = x) = \sum_{Y=y} P(Z = z|Y = y)P(Y = y|X = x)$$

4.1 例：インフルエンザ→高熱→体温計での高温表示

先ほどのインフルエンザの例を、観察ノード「HighTherm」を加えて拡張する。HighTherm は、体温計で測った体温の表示を表す。

$$\begin{array}{ccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z \\ \text{インフルエンザ}\ (Flu) & \rightarrow & \text{高熱}\ (HighTemp) & \rightarrow & \text{体温計での高温表示}\ (HighTherm) \end{array}$$

体温計における表示について想定される誤表示は、次の CPT の項目で表されるとする。

$$P(HighTherm = T|HighTemp = T) = 0.95 \quad \text{(つまり 5 %は、低く誤表示してしまう)}$$

$$P(HighTherm = T|HighTemp = F) = 0.15 \quad \text{(つまり 15 %は、高く誤表示してしまう)}$$

■体温計が高温を表示したとすると ($HighTherm = T$)、インフルエンザ (Flu) である確率はどの程度か、診断推論を行いなさい。

参考文献

Kevin B. Korb and Ann E. Nicholson, *Bayesian Artificial Intelligence*, Chapman & Hall / CRC, 2004