表現論とフーリエ解析

河添　健

タイトルをより正確に述べれば,「表現論を用いたフーリエ解析の解釈とその可能性」である．フーリエ級数とフーリエ変換に関しては，逆変換公式、パーセバルの公式など多くの共通の性質や類型の定理が存在する．それは何故だろうか？他にも同じような類型を持つ変換はないのだろうか？こうした問題を考えるとき，群の表現論という枠組みでフーリエ解析を捕らえることにより一般的な方向性を得ることができる．例えば連続型ウェーブレット変換なども，この枠組みの中に収めることができる．以下では歴史的な背景を中心にこの話題を解説してみたい．

1. フーリエの時代

フーリエが熱伝導の研究を始めたのは 1800 年頃で熱伝導方程式を導き，その解法を与えた．その際”すべての周期関数は三角級数で書ける”という大胆な主張をした．フーリエは何度もその主張の正しさを説明するが，数学の諸概念ー関数・積分・収束などーが確立していない頃で，その主張は認められなかった．1829 年にディリクレが単調関数に関するフーリエ級数展開の各点収束性を証明する．フーリエの主張の大胆さは”すべての周期関数”と言い切ったことで，それ以前にもいくつかの関数が三角級数で書ける事はすでに知られていた．またオイラーやダランベールが解いた弦振動方程式の研究の際にも，ダニエル・ベルヌーイは解を三角級数に限定してその解法を考えている．これらは音響学の研究から自然な発想であった．またその延長としてラグランジュは一般の関数の三角級数展開の形に到達してる．このような歴史的背景からすると，フーリエの主張は証明ができなかった以上，さほど大胆とも言えない．しかし厳密な理論より物理・工学・光学などへの応用が先行し，フーリエ解析と呼ばれれるようになる．

フーリエ級数における周期関数 f の周期を無限とすることにより，フーリエ変換の理論が類推できる．f の厳密な条件を無視すればそれらは

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx},\ x \in \mathbb{T},$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} dx,\ n \in \mathbb{Z}$$

および

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda,\ x \in \mathbb{R},$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} dx\ \lambda \in \mathbb{R}$$

と書くことができる．これらの公式の厳密化や一般化が解析学の発展に大きくつながる．例えば $\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\}$ の $\mathbb{T}$ での直交性は，リース・フィッシャーの定理へと拡張される．2 つの公式は非常に似ており，さらには $\hat{f}(n)$ と $\hat{f}(\lambda)$ は多くの共通する性質を持つ．何故だろうか。ここで $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$ とあえて群の記号を使った．

2. 表現論の始まり

ラグランジュは解析学の発展に大きく貢献する一方で，代数方程式の解法と解の置換との関係を見つける．ここからアーベル、ガロアの理論へと発展する．また1837年にディリクレはL関数を用いて算術級数定理を証明するが，その際に$\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$なるいわゆるディリクレ指標を導入する．このような背景を受けてフローベニウスは有限群の表現論とその指標の理論の基礎を構築する．そしてバーンサイドやシューアに受け継がれていく．

Gが有限アーベル群のとき

$$\chi : G \to \mathbb{C}$$

なる写像で$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b),\ \forall a, b \in G$を満たすとき指標という．$G$の位数$|G|$が有限なので，$\chi(g)$は1の$|G|$乗根である．とくに$\chi : G \to U(1)$である．ここで$U(1)$は絶対値1の複素数全体である．このような指標の全体$\hat{G}$をGの双対と呼ぶ．このとき$f : G \to \mathbb{C}$なる関数に対して

$$f(g) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(g),\ g \in G,$$

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{G} f(g)\overline{\chi(g)},\ \chi \in \hat{G}$$

となる．とくに$\{|G|^{-1/2}\chi; \chi \in \hat{G}\}$は$G$上で直交関係を満たし，また$G \cong \hat{G}$となる．$G$が一般の有限群のときは

$$\pi : G \to U(n)$$

なるn次ユニタリー行列全体への準同型写像を考える．πはGのユニタリー表現とよばれる．このとき，そのトレース$\mathrm{tr}(\pi(\cdot)) : \mathrm{G} \to \mathbb{C}$を指標と呼ぶ．このような指標の中で”既約”ユニタリー表現の指標全体を用いることにより，群環の要素が上のように展開できるというのが有限群の指標理論である．表現πおよびその指標$\mathrm{tr}(\pi)$はGの性質を大きく反映しており，それらを調べることはG自身を解析することに等しい．その意味でGの”表現”と言う言葉が使われる．

3. 基本形の完成

$\mathbb{T}$，$\mathbb{R}$，有限群G上の関数に対して3個の逆変換公式の類型が得られた．$\mathbb{T}$，$\mathbb{R}$は有限ではないがアーベル群である．また$\mathbb{T}$，$\mathbb{R}$に関しては群上の関数の積分が必要である．類型の背景には群と位相が潜んでいることが分かる．そこからこの類型を位相群ー群演算が連続となる位相をもつ群ーさらには群演算が実解析的となるリー群Gへ拡張することが研究される．G上の積分を定める測度ー不変測度dgの研究，Gの既約ユニタリー表現（の同値類）の全体$\hat{G}$の決定，ユニタリー表現のトレースや行列要素のG上での直交性，それらを用いた変換とその逆変換公式（$\hat{G}$上の測度$d\pi$の決定）が調べられる．これらをG上の調和解析と呼ぶ．簡約するとG上の関数fに対して

$$\hat{f}(\pi) = \int_G f(g)\pi(g)dg, \quad \pi \in \hat{G}$$

なる作用値フーリエ変換を定義する．このとき

$$f(g) = \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}(\hat{f}(\pi)\pi(g^{-1}))d\pi,\ g \in G$$

となる$(G, dg; \hat{G}, d\pi)$の枠組みを作る問題である．

Gが局所コンパクト・アーベル群のとき，その既約ユニタリー表現は1次元である．したがって$\hat{G}$は指標の全体と一致する．Gの構造と$\hat{G}$の決定はポントリャーギンにより1920年代後半になされる．とくに$G = \mathbb{T}$のとき，$\hat{\mathbb{T}} = \{\chi_n; n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$，$\chi_n(x) = e^{inx}$である．測度の定数倍を無視すれば，$(G, dg; \hat{G}, d\pi) = (\mathbb{T}, dx; \mathbb{Z}, \delta_n)$となる。$\delta_n$は点測度である．$G = \mathbb{R}$のときは$\hat{\mathbb{R}} = \{\chi_\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$，$\chi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$であり，$(G, dg; \hat{G}, d\pi) = (\mathbb{R}, dx; \mathbb{R}, d\lambda)$となる．また有限アーベル群も離散位相を入れることにより、コンパクト・アーベル群となり$(G, dg; \hat{G}, d\pi) = (G, \delta_g; \hat{G}, \delta_\chi)$と同じ枠組みに入る．上述の3つの類型は局所コンパクト・アーベル群上の調和解析の視点から1つにとらえる事ができた．

1920 年代にワイルがコンパクト群の表現を研究し，$\hat{G}$ とその指標を決定する．G がコンパクトのとき，その既約ユニタリー表現は有限次元であり，$\pi : G \to U(n)$ の形になる．ワイルはその次元 $n = d(\pi)$ を求める公式や行列 $\pi(g)$ の (i, j) 成分 $\pi_{ij}(g)$（行列要素）の G 上における直交性を証明する．ペーターとともにコンパクト群上の 2 乗可積分関数の全体 $L^2(G)$ に対するフーリエ級数論を完成させる．

定理（ペーター・ワイル） G をコンパクト群とし，ハール測度 dg を $\int_G dg = 1$ に正規化する．このとき $\{\sqrt{d(\pi)}\pi_{ij}(g); 1 \le i, j \le d(\pi), \pi \in \hat{G}\}$ は $L^2(G)$ の完備正規直交基底となる．すなわち L^2 収束の意味で

$$f(g) = \sum_{\pi \in \hat{G}} \sum_{1 \le i,j \le d(\pi)} \sqrt{d(\pi)} \hat{f}_{i,j}(\pi),\ g \in G$$

$$\hat{f}_{i,j}(\pi) = \sqrt{d(\pi)} \int_G f(g) \overline{\pi_{i,j}(g)} dg,\ \pi \in \hat{G}$$

である．

前節の $d\pi$ は点測度となり，$\mathrm{tr}(\hat{f}(\pi)\pi(g^{-1}))$ を対角成分の和で計算した．$G = \mathbb{T}$ とすれば，$d(\pi) = 1$ より古典フーリエ級数展開となる．ただし $dg = dx/2\pi$ となるので，前述の式とは係数が異なる．

局所コンパクト・アーベル群およびコンパクト群上で調和解析が完成したが，次のステップは一般の非可換・非コンパクト局所コンパクト群である．1947 年に 2 つの論文が発表される。1 つはバルグマンによる $SL(2, \mathbb{R})$ 上の調和解析であり，もう 1 つはゲルファント・ナイマルクによる $SL(2, \mathbb{C})$ 上の調和解析である．それぞれ行列式 1 な 2×2 の実および複素行列の全体である．これらに共通することは，$\hat{G}$ を有限次元表現の範疇で定義するだけでは，上述の枠組みを構成するには狭すぎ，より一般にヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対して

$$\pi : G \to U(\mathcal{H})$$

なる $\mathcal{H}$ 上のユニタリー作用素全体への準同型を考える点である．tr は作用素のトレースを考える．これにより形は複雑になるが，求める枠組みが完成する．$G = SL(2, \mathbb{R})$ のとき，逆変換公式は

$$\begin{aligned}
f(g) = {} & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \mathrm{tr}(\hat{f}(\pi_{0,1/2+i\lambda})\pi_{0,1/2+i\lambda}(g^{-1})) \\
& \qquad \times \lambda \tanh \pi\lambda d\lambda \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \mathrm{tr}(\hat{f}(\pi_{1/2,1/2+i\lambda})\pi_{1/2,1/2+i\lambda}(g^{-1})) \\
& \qquad \times \lambda \coth \pi\lambda d\lambda \\
& + \frac{1}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}/2, n \ge 1} (2n-1)\Big(\mathrm{tr}(\hat{f}(\pi_n)\pi_n(g^{-1})) \\
& \qquad + \mathrm{tr}(\hat{f}(\pi_{-n})\pi_{-n}(g^{-1}))\Big)
\end{aligned}$$

となる．積分項と離散項の和になるが，これらは $\hat{G}$ の中の $\pi_{j,1/2+i\lambda}$, $j = 0, 1/2$（主系列表現）と $\pi_{\pm n}$（離散系列表現）に対応している．

$$\pi_{j,s} : G \to U(L^2(\mathbb{R})),$$

$$\begin{aligned}
& (\pi_{j,s}(g)f)(x) \\
= {} & (\mathrm{sgn}(cx+d))^{2j}|cx+d|^{-2s} f\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big), \\
& x \in \mathbb{R},\ g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G
\end{aligned}$$

であり，$n \in \mathbb{Z}/2, n \ge 1$ に対して

$$\pi_n : G \to U(H_n^2(\mathbb{C}^+)),$$

$$(\pi_n(g)f)(x) = (cx+d))^{-2n} f\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big),\ x \in \mathbb{C}^+$$

である．ここで $H_n^2(\mathbb{C}^+)$ は上半平面 $\mathbb{C}^+$ で $\int\int_{\mathbb{C}^+} |f(z)|^2 y^{2n-2} dxdy < \infty$ となる正則関数の全体（バルグマン空間）である．$\pi_n, n \in \mathbb{Z}/2$, $n \le 1$ に関しては反正則関数に置き換えて定義する．$\hat{G}$ にはこの 2 系列以外にも補系列表現と極限離散系列表現があるが，逆変換公式には使われない．

4. その後の発展

前述の 2 つの具体的な行列群から一般の非可換・非コンパクト群への拡張が試みられる．リー環論，表現論の研究が進行し，1970 年代に Harish-Chandra によって非コンパクト半単

純リー群上のフーリエ解析が完成する．紙面の都合上、これ以上は詳しく述べられないが，上述の $SL(2,\mathbb{R})$ の類型が成立する．

今回紹介したフーリエ解析や作用素の特異積分論などを含む広い意味での調和解析もリー群上で盛んに研究が続けられている．a を中心とする半径 r の球を $B(a,r)$ とし，そのハール測度による体積を $|B(a,r)|$ と書くことにする．このときある定数が C が存在し，すべての a,r に対して $|B(a,2r)| \leq C|B(a,r)|$ となるとき，空間は等質型であるという．$\mathbb{R}^n$，コンパクト群，ハイゼンベルグ群などは等質型である．このような等質型な空間においては $\mathbb{R}^n$ と同様な調和解析を展開することができる．それに対して非コンパクト半単純リー群は等質型ではない．ここでは議論が複雑になると同時に，$\|f*g\|_2 \leq C\|f\|_2\|g\|_p$, $1 \leq p < 2$ となるなど $\mathbb{R}^n$ では成り立たない性質が現れる。(Kunze-Stein 現象) 非コンパクト半単純リー群上の調和解析では，表現の性質に起因する多くの興味のある問題が研究されている．

1980 年代に登場したウェーブレット解析も表現論と密接に関連している．連続型ウェーブレットは $ax+b$ 群上の調和解析から導かれ，より一般にはリー群の 2 乗可積分表現の行列要素の直交性から導かれる．G のユニタリー表現 $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ の行列要素が G 上で 2 乗可積分であるとする．このときある $\psi \in \mathcal{H}$, $c_\psi > 0$ が存在し，すべての $\phi \in \mathcal{H}$ が

$$\phi = c_\psi^{-1} \int_G \langle \phi, \pi(g)\psi \rangle_{\mathcal{H}} \pi(g)\psi dg$$

と書ける．ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の内積である．G として（縮退）ハイゼンベルグ群をとり，その 2 乗可積分表現を考えると上述の変換はガボール変換となる．また G として $ax+b$ 群をとると連続型ウェーブレット変換が得られる．

最後に最近の話題を 1 つ紹介する．上述の話とはまったく別の表現論的なフーリエ変換の解釈である．ハイゼンベルグ群 H_n の既約ユニタリー表現の同値類の全体 $\hat{H}_n$ は 1 次元表現と $L^2(\mathbb{R}^n)$ に実現されるシュレディンガー表現 π からなる．（ストーン・フォンノイマンの定理）$\pi : H_n \to U(L^2(\mathbb{R}^n))$ である．H_n の自己同型群はシンプレクティック群 Sp_{2n} である。$Sp_{2n} \ni \sigma$ は自然と π に $\pi^\sigma(g) = \pi(\sigma \cdot g), g \in H_n$ と作用する．しかし $\hat{H}_n$ の構造からすべて $\pi^\sigma \cong \pi$ と同値な表現である．したがって $\rho(g) \in U(L^2(\mathbb{R}^{\ltimes}))$ が存在し，$\rho(g)\pi(g)\rho(g^{-1}) = \pi^\sigma(g)$ となる．定数倍の曖昧さを解消するために Sp_{2n} の 2 重被覆群ーメタプレクティック群 Mp_{2n} を考えると，ρ は $\rho : Mp_{2n} \to U(L^2(\mathbb{R}^n))$ なる表現となる．ヴェイユ表現と呼ばれる．1964 年にヴェイユはこの表現を用いて整数論における θ-関数の表現論的解釈を与えた．このとき，Mp_{2n} の中に反転元と呼ばれる特別な要素 w が存在し

$$\rho(w) = \text{フーリエ変換}$$

となる．とくに $\rho(w)^2 = I$ となる．

この枠組みを一般化することによりフーリエ変換の一般化が期待される．ヴェイユ表現 ρ は極小表現と呼ばれる特殊な表現で，このような表現の存在と構成の研究が課題となるのだが，このヴェイユ表現と数理物理における $O(4,2)$ の極小表現が 1970 年代に研究された．1990 年代に新たな極小表現が構成され，再び盛んに研究されている．とくに 2003 年に小林ー Ørsted により $O(p,q)$ の極小表現の L^2-モデルが発見された．このモデルにおける反転元 w に対する $\rho(w)$ ーフーリエ変換の一般化ーの具体形は，小林ー真野により積分変換の形でが求められた．この際，核関数の表示に Meijer の G-関数と呼ばれる特殊関数が登場する．さらに最近、真野はフーリエ変換がラドン変換とメリン変換の合成となる事実を，それぞれの変換の一般化を構成することにより $\rho(w)$ の分解に拡張にした．

本文の詳細については以下の参考文献を参照されたい．フーリエ解析の歴史に関しては 1) にまとめた．具体的な群上での表現の構成やそれもとづく調和解析は 1)，4) を参考にされたい．リー群と表現論の一般論に関しては 2) が詳しく

書かれている．最後に述べたヴェイユ表現の拡張に関しては 3) を参照されたい．

参考文献

1) 河添　健：「群上の調和解析」, 朝倉書店（2000）
2) 小林俊行・大島利雄：「リー群と表現論」, 岩波書店（2005）
3) 小林俊行・真野元：「O(p, q) の極小表現の反転を与える積分作用素」, 数理解析研究所講究録 1467「群の表現と調和解析の広がり」（2006 ）
4) 杉浦光夫：「Unitary Representations and Harmonic Analyisis」(Second Edition）, North-Holland/ Kodansha (1990)

（かわぞえ　たけし，慶應義塾大学総合政策学部）