第１章「集合」の問題

$\boxed{\textbf{例題１－１}}$ $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ のとき, 次の集合を求めよ.

(1) $P(A)$
(2) $\{\{x\} \mid x \in A\}$
(3) $P\left(\{A\}\right)$

（例題１－１の解答）

(1) $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,2\}, A\}$
(2) $\{\{x\} \mid x \in A\} = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$
(3) $P\left(\{A\}\right) = \{\emptyset, \{A\}\}$

$\boxed{\textbf{類題１－１}}$ $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ のとき, 次の集合を求めよ.

(1) $\bigcup\{\{x\}|x \in A\}$
(2) $\bigcap\{\{x\}|x \in A\}$
(3) $P\left(P(\emptyset)\right)$

（類題１－１の解答）

(1) $\bigcup\{\{x\}|x \in A\} = \{0,\ 1,\ 2\}$
(2) $\bigcap\{\{x\}|x \in A\} = \emptyset$
(3) $P\left(P(\emptyset)\right) = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$

$\boxed{\textbf{例題１－２}}$ 次の集合を求めよ.

(1) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)$
(2) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n},\ 2\right]$

（例題１－２の解答）

(1) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right) = \{0\}$
(2) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n},\ 2\right] = (0,\ 2]$

$\boxed{\textbf{類題１－２}}$ 次の集合列について, $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} A_n$ および $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} A_n$ を求めよ.

(1) $n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$A_n = \begin{cases} [0,\ 1] & (\ n \text{ が奇数 }) \\ [1,\ 2] & (\ n \text{ が偶数 }) \end{cases}$$

(2) $n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$A_n = \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{n},\ 2-\dfrac{1}{n}\right) & (\ n \text{ が奇数 }) \\ \left(\dfrac{1}{n},\ 2+\dfrac{1}{n}\right) & (\ n \text{ が偶数 }) \end{cases}$$

（類題１－２の解答）

(1) $\limsup_{n\to\infty} A_n = [0,\ 2]$ および $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{1\}$
(2) $\limsup_{n\to\infty} A_n = [0,\ 1]$ および $\liminf_{n\to\infty} A_n = (0,\ 1)$

例題１－３　次の数列について, $\limsup_{n\to\infty}$（上極限）および $\liminf_{n\to\infty}$（下極限）を求めよ.

(1) $(-1)^n$
(2) $1+n^{(-1)^n}$

（例題１－３の解答）

(1) $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1, \qquad \liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1$
(2) $\limsup_{n\to\infty} 1+n^{(-1)^n} = \infty, \qquad \liminf_{n\to\infty} 1+n^{(-1)^n} = 1$

類題１－３　次の数列について, $\limsup_{n\to\infty}$（上極限）および $\liminf_{n\to\infty}$（下極限）を求めよ.

(1) $(-1)^n n$
(2) $\sin\dfrac{n\pi}{3}$

（類題１－３の解答）

(1) $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty, \qquad \liminf_{n\to\infty}(-1)^n n = -\infty$
(2) $\limsup_{n\to\infty} \sin\dfrac{n\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \liminf_{n\to\infty} \sin\dfrac{n\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

例題１－４　$a_n \geq 0$ $(n=1,2,\cdots)$ のとき, 次の (1) および (2) を証明せよ.

(1) $a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

(例題１－４の解答)

(1) $0 \leq a < 1$ より $a < r < 1$ なる r をとる. 上極限の定義により, ある $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して, すべての $n \geq n_0$ に対し, $\sqrt[n]{a_n} < r$, すなわち $a_n < r^n$ となる. よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} r^n < \infty$$

となり, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $a > 1$ より 上極限の定義から, ある $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して, すべての $n \geq n_0$ に対し, $\sqrt[n]{a_n} > 1$, すなわち $a_n > 1$ となる. よって $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ とはならないから, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

$\boxed{\textbf{類題１－４}}$ 例題１－４の結果を利用して, 次の事柄を証明せよ.（コーシー・アダマールの定理）

$r_0 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ とおく. $0 < r_0 < \infty$ ならば, ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < \dfrac{1}{r_0}$ のとき絶対収束する. すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| < \infty$.

(類題１－４の解答)

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right) \times |x| < r_0 \times \frac{1}{r_0} = 1$$

だから, 例題１－４の（１）より $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ は収束する.

$\boxed{\textbf{例題１－５}}$ X, Y を空でない集合とする. このとき, 次の (1), (2) を証明せよ.

(1) X から Y への全単射が存在する $\longleftrightarrow$ Y から X への全単射が存在する

(2) X から Y への単射が存在する $\longleftrightarrow$ Y から X への全射が存在する

(例題１－５の解答)

(1) $f : X \longrightarrow Y$ を全単射とすれば, $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ も全単射であるから明らか.

(2) $f : X \longrightarrow Y$ を単射とする．このとき, f を $f : X \longrightarrow f(X)$ とすれば全単射だから, (1) より $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ は全単射. $a \in X$ を１つ決めておいて, $g : Y \longrightarrow X$ を

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & (\ y \in f(X) \text{ のとき }) \\ a, & (\ y \in Y \setminus f(X) \text{ のとき }) \end{cases}$$

と定めると, g は明らかに全射となる.
逆に $g : Y \longrightarrow X$ を全射とすれば, 任意の $x \in X$ に対して $y \in Y$ が存在して, $x = g(y)$ と出来る．各 $x \in X$ に対して Y の部分集合 $Y_x = \{y \in Y \mid x = g(y)\}$ は空ではないから, 要素 $y_x \in Y_x$ を１つとることができる．写像 $f : X \longrightarrow Y$ を $y_x = f(x) \quad (\ x \in X\ )$ と定めると, f は明らかに単射となる.

類題１－５ $X,\ Y,\ Z$ を空でない集合とし, 写像 $\varphi : X \longrightarrow Y$ と $\psi : Y \longrightarrow Z$ およびその合成写像 $\psi \circ \varphi : X \longrightarrow Z$ について, 次の (1), (2) を証明せよ.

(1) $\psi \circ \varphi$ が全射ならば ψ は全射である

(2) $\psi \circ \varphi$ が単射ならば φ は単射である

（類題１－５の解答）

(1) $\psi \circ \varphi : X \longrightarrow Z$ が全射だから $Z = \psi \circ \varphi(X) = \psi(\varphi(X))$. ゆえに $\psi(Y) \supset \psi(\varphi(X)) = Z$, 一方 $\psi(Y) \subset Z$ より $\psi(Y) = Z$ で $\psi : Y \longrightarrow Z$ は全射.

(2) $\psi \circ \varphi : X \longrightarrow Z$ が単射だから $x_1 \neq x_2,\ x_1, x_2 \in X$ に対して $\psi(\varphi(x_1)) \neq \psi(\varphi(x_2))$. よって $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, ゆえに $\varphi : X \longrightarrow Y$ は単射.

復習 集合の濃度の定義とその性質について, いくつかの復習と確認をする．集合 A の要素の個数を集合 A の濃度といい

$$\mathrm{card}\ A, \quad N(A) \quad \text{または} \quad |A|$$

などで表す．ここでは記号 card A を使用する．例えば

(i) $\emptyset = \{\ \}$ （空集合）のとき $\mathrm{card}\ \emptyset = 0$

(ii) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ のとき card $A = 6$
(iii) $B = \{100$ 以下の自然数 $\}$ のとき card $B = 100$
(iv) $\mathbf{N} = \{1,2,3,\cdots\}$ （自然数全体の集合）のとき card $\mathbf{N} = \infty$ であるが, この濃度 card $\mathbf{N}$ のことを可算濃度と呼び, 記号 $\aleph_0$ （アレフ・ゼロ）で表す．すなわち card $\mathbf{N} \equiv \aleph_0$ と記す.
(v) $P(\mathbf{N}) = \{A \mid A \subset \mathbf{N}\}$ （$\mathbf{N}$ のベキ集合）のときも card $P(\mathbf{N}) = \infty$ である．この濃度 card $P(\mathbf{N})$ のことを連続濃度と呼び, 記号 $\aleph$ （アレフ）で表す．すなわち card $P(\mathbf{N}) \equiv \aleph$ と記す.

A, B を２つの集合とし, A から B への全単射が存在するときは, card A = card B と定め, そうでないときは card $A \neq$ card B と定義する.

A から B への単射が存在するときは, card $A \leq$ card B と定める．さらに card $A \leq$ card B かつ card $A \neq$ card B のとき card $A <$ card B と定義する.

このとき, 命題１．４, 命題１．５および命題１．６により, 次の (a) (b) が成り立つ：

(a) card $\mathbf{N}$ = card $\mathbf{Z}$ = card $\mathbf{Q} = \aleph_0$
(b) card $\mathbf{N} <$ card $\mathbf{R}$

定理１．２（カントールの定理）により

$$(\aleph_0 =)\mathrm{card}\ \mathbf{N} < \mathrm{card}\ P(\mathbf{N})(= \aleph) < \mathrm{card}\ P(P(\mathbf{N})) < \cdots$$

がわかる．また, 一般連続体仮説を認めれば, 以下の命題が成り立つこととなる：

card $\mathbf{N} <$ card $A <$ card $P(\mathbf{N})$　となる無限集合 A は存在しない

さらに集合の濃度について, 以下の重要な性質 (1)~(7) が成り立つ：

(1) card A = card A
(2) card A = card B ならば card B = card A
(3) card A = card B かつ card B = card C ならば card A = card C
(4) card $A \leq$ card A
(5) card $A \leq$ card B かつ card $B \leq$ card C ならば card $A \leq$ card C
(6) card $A \leq$ card B かつ card $B \leq$ card A ならば card A = card B
（この性質 (6) は, ベルンシュタインの定理と呼ばれている）

(7) 任意の集合 $A,\ B$ に対して, $\mathrm{card}\, A \leq \mathrm{card}\, B$ または $\mathrm{card}\, B \leq \mathrm{card}\, A$
（この性質 (7) は, ツェルメロの整列可能定理と呼ばれている）

例題１－６ 上記の性質 (6) ベルンシュタインの定理を証明してみよ.（これはとても難しいが $\cdots$. つまり以下の解答を読んで, 理解できればよい）

（例題１－６の解答）

$f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$ をそれぞれ単射として, 全単射 $h :\longrightarrow B$ を構成してやればよい. まず, $\varphi : P(A) \longrightarrow P(A)$ （ここで $P(A)$ は A のベキ集合）を次で定める.

(1) $$\varphi(E) = [g([f(E)]^c)]^c, \qquad (\ E \in P(A)\ )$$

（それぞれの補集合は, それぞれ $A,\ B$ を全体集合と考える）このとき

(2) $$E \subset F \subset A \longrightarrow \varphi(E) \subset \varphi(F) \subset A$$

は明らか. ここで $\mathcal{D} = \{E \in P(A) \mid E \subset \varphi(E)\}$ とする. $\emptyset \in \mathcal{D}$ だから

(3) $$D = \bigcup_{E \in \mathcal{D}} E \qquad \text{は意味を持つ.}$$

ここで $E \in \mathcal{D} \longrightarrow E \subset D$ だから, (2) より

$$E \in \mathcal{D} \longrightarrow E \subset \varphi(E) \subset \varphi(D).$$

ゆえに (3) より

(4) $$D \subset \varphi(D) \subset A$$

これと (2) より $\varphi(D) \subset \varphi(\varphi(D)) \subset A$. よって $\varphi(D) \in \mathcal{D}$. また (3) より $\varphi(D) \subset D$. ゆえに (4) から $D = \varphi(D)$. したがって (1) より

$$D = \varphi(D) = [g([f(D)]^c)]^c$$

であり $D^c = g([f(D)]^c)$ が成り立つ. $f,\ g$ は単射と仮定したから

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & (\ x \in D \text{ のとき}\ ) \\ g^{-1}(x), & (\ x \in D^c \text{ のとき}\ ) \end{cases}$$

と定めると, $h : A \longrightarrow B$ は全単射となる.

類題１－６　$\mathbf{N}^2 = \{(m,\ n) \mid m,\ n \in \mathbf{N}\}$ とすると

$$\text{card } \mathbf{N}^2 = \text{card } \mathbf{N} (\equiv \aleph_0)$$

となることを示せ.

（類題１－６の解答）

全単射 $f : \mathbf{N}^2 \longrightarrow \mathbf{N}$ を

$$f(m,\ n) = \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+m \qquad (\ (m,\ n) \in \mathbf{N}^2\ )$$

で定めればよい.

例題１－７　正の２進数（デジタル信号）の全体の集合

$$D \equiv \{x = a_1 a_2 a_3 \cdots \mid a_j = 0 \text{ または } 1,\ (j \in \mathbf{N})\ \}$$

の濃度は連続濃度 $\aleph$ であることを証明せよ．すなわち

$$\text{card } D = \text{card } P(\mathbf{N}) (\equiv \aleph)$$

となることを示せ.

（例題１－７の解答）

全単射 $f : D \longrightarrow P(\mathbf{N})$ を作ればよい.

$$x = a_1 a_2 a_3 \cdots \in D \quad \text{に対して} \quad f(x) = \{j \mid a_j = 1\} \in P(\mathbf{N})$$

と定めれば単射は明らか．さらに, 任意の $A \in P(\mathbf{N})$ に対して a_j ($j = 1,\ 2,\ 3, \cdots$) を

$$a_j = \begin{cases} 1 & (j \in A) \\ 0 & (j \in \mathbf{N} \setminus A) \end{cases}$$

と定め, $x = a_1 a_2 a_3 \cdots \in D$ をつくると $f(x) = A$ となるので全射も成り立つ．ゆえに, $\text{card } D = \text{card } P(\mathbf{N}) (\equiv \aleph)$ がいえた.

類題１－７　半開区間 $[0,\ 1) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ について

$$\text{card } [0,\ 1) = \aleph$$

となることを示せ.

（類題１－７の解答）

　$\text{card } [0,\ 1) \leq \text{card } D \leq \text{card } [0,\ 1)$ を示せばよい．なぜなら, ベルンシュタインの定理によって $\text{card } [0,\ 1) = \text{card } D = \aleph$ がわかる.

(i) card $[0,\ 1) \leq$ card D を示す. $x \in [0,\ 1)$ に対して, $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j}$ と

２進展開する. ただし

$$[0,\ 1) \ni \frac{1}{2} = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 0.011\cdots$$

$$[0,\ 1) \ni \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \cdots = 0.100\cdots$$

であるが, この場合には後者を用いる. このとき, 写像

$$f : x \in [0,\ 1) \longmapsto a_1 a_2 a_3 \cdots \in D$$

は明らかに単射であるから, card $[0,\ 1) \leq$ card D がいえた.

(ii) card $D \leq$ card $[0,\ 1)$ を示す. $a_1 a_2 a_3 \cdots \in D$ に対して、$x \in [0,\ 1)$ を $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$ と定めると, 写像

$$g : a_1 a_2 a_3 \cdots \in D \longmapsto x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j} \in [0,\ 1)$$

は明らかに単射であるから, card $D \leq$ card $[0,\ 1)$ もいえた.

例題１－８　１次元実数値全体の集合 $\mathbf{R}$ は連続濃度をもつ. すなわち

$$\text{card } \mathbf{R} = \aleph$$

となることを示せ.

（例題１－８の解答）

恒等写像（これは単射）を考えれば

$$\text{card } (0,\ 1) \leq \text{card } [0,\ 1) \leq \text{card } \mathbf{R}$$

また $f(x) = \tan \pi \left(-\frac{1}{2} \right)$ により, 写像 $f : (0,\ 1) \longrightarrow \mathbf{R}$ を考えると, これは全単射だから card $(0,\ 1) =$ card $\mathbf{R}$. よって

$$\text{card } \mathbf{R} = \text{card } (0,\ 1) \leq \text{card } [0,\ 1) \leq \text{card } \mathbf{R}.$$

従ってベルンシュタインの定理より, card $\mathbf{R} =$ card $[0,\ 1) = \aleph$.

類題１－８　２次元実数値全体の集合 $\mathbf{R}^2$ は連続濃度をもつ. すなわち

$$\text{card } \mathbf{R}^2 = \aleph$$

となることを示せ.

（類題１－８の解答）

写像 $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto (x,\ x) \in \mathbf{R}^2$ は明らかに単射だから

$$\text{card } \mathbf{R} \leq \text{card } \mathbf{R}^2$$

.

逆に $(x,\ y) \in \mathbf{R}^2$ に対して, $x,\ y$ を１０進展開して

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} a_k 10^k, \qquad y = \sum_{k=-\infty}^{m} b_k 10^k$$

と書き表す. ここで写像 $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ を

$$g(x,\ y) = \sum_{k=-\infty}^{n} a_k 10^{2k} + \sum_{k=-\infty}^{m} b_k 10^{2k+1}$$

と定めれば, g も単射となり, card $\mathbf{R}^2 \leq$ card $\mathbf{R}$. よってベルンシュタインの定理により card $\mathbf{R}^2 =$ card $\mathbf{R} = \aleph$.

例題１－９　まず I_0 を $\mathbf{R}$ 内の閉区間 $[0,\ 1]$ とする. そして, 次々に $I_1,\ I_2,\ I_3, \cdots$ を以下の様に定めてゆく：

$$\begin{aligned}
I_0 &= [0,\ 1] \\
I_1 &= I_0 \setminus \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right) \\
I_2 &= I_1 \setminus \left\{\left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right) \bigcup \left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)\right\} \\
I_3 &= I_2 \setminus \left\{\left(\frac{1}{27},\ \frac{2}{27}\right) \bigcup \left(\frac{7}{27},\ \frac{8}{27}\right) \bigcup \left(\frac{19}{27},\ \frac{20}{27}\right) \bigcup \left(\frac{25}{27},\ \frac{26}{27}\right)\right\} \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

このとき, $\mathcal{C} \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ で定義された $\mathbf{R}$ 内の部分集合 $\mathcal{C}$ はカントール集合と呼ばれるが, このカントール集合 $\mathcal{C}$ の濃度は連続濃度であることを証明せよ. すなわち

$$\text{card } \mathcal{C} = \aleph$$

となることを示せ.

（例題１－９の解答）

各 I_n の端点は $\mathcal{C}$ の元であり, それらを３進展開する. それらの中で最後の桁が 1 のものは $222\cdots$ で表現すれば $\mathcal{C}$ の元はすべて

$$0.2,\ 0.02,\ 0.22,\ 0.002,\ 0.022,\ 0.202,\ 0.222,\cdots$$

と表現される. これを 2 で割ると

$$0.1,\ 0.01,\ 0.11,\ 0.001,\ 0.011,\ 0.101,\ 0.111,\cdots$$

となり, これは $[0,\ 1]$ を２進展開したものとすべて同じである. よって $\mathcal{C}$ は連続濃度をもつ.

類題１－９　カントール集合 $\mathcal{C}$ の長さ（集合の大きさ、正確には１次元ルベーグ測度）は０となることを証明せよ. すなわち, μ_1 を $\mathbf{R}$ 上の１次元ルベーグ測度とすれば, $\mu_1(\mathcal{C})=0$ となることを示せ.

（類題１－９の解答）

$$\begin{aligned}
\mu_1(\mathcal{C}) &= \mu_1(I_0)-\mu_1(I_1)-\mu_1(I_2)-\mu_1(I_3)-\cdots \\
&= 1-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}-\frac{4}{27}-\cdots \\
&= 1-\frac{1}{3}\left\{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\right\} \\
&= 1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1-1=0
\end{aligned}$$

例題１－１０　$\mathbf{T}=\{(x,\ y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$（ $\mathbf{R}^2$ 内の単位円周 ）とし, 原点を中心として角度１ラジアンの回転を T で表す. $a\in\mathbf{T}$ を任意にとり,

$$\mathbf{T}_a=\{T^n a \mid n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots\}$$

と定める.　このとき 2π ： 1 は無理数の比であるから, 各 $T^n a$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ は重なることはない. 次に $b\in\mathbf{T}\setminus\mathbf{T}_a$ を任意にとり

$$\mathbf{T}_b=\{T^n b \mid n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots\}$$

と定める. 次に $c\in\mathbf{T}\setminus\left(\mathbf{T}_a\bigcup\mathbf{T}_b\right)$ を任意にとり

$$\mathbf{T}_c=\{T^n c \mid n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots\}$$

と定める. これを無限に繰り返して残りがなくなるまで行い

$$\mathcal{L}=\{a,\ b,\ c,\cdots\}$$

とする. このとき明らかに

(1) $T^m\mathcal{L}\bigcap T^n\mathcal{L}=\emptyset, \quad (n\neq m)$

(2) $\displaystyle\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n\mathcal{L}=\mathbf{T}$

が成り立つ．ここで $\mathcal{L}^*=\{t\theta\in\mathbf{R}^2 \mid 0<t\leq 1,\ \theta\in\mathcal{L}\}$ と定義すれば, (1) (2) から明らかに

(3) $T^m\mathcal{L}^*\bigcap T^n\mathcal{L}^*=\emptyset, \quad (n\neq m)$

(4) $\displaystyle\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n\mathcal{L}^*=\{(x,\ y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x^2+y^2\leq 1\}$

が成り立つことがわかる. 上記の様に構成された集合 $\mathcal{L}^*$ はルベーグ非可測集合と呼ばれ, 面積を定めることが出来ない集合である．なぜなら, もし面積を定めることができる集合（つまり２次元ルベーグ可測集合のこと）であると仮定してみる．μ_2 を $\mathbf{R}^2$ 上の２次元ルベーグ測度とし, ２次元ルベーグ可測集合 A の面積を $\mu_2(A)$ で表す）とする．面積は回転により不変なので

$$\mu_2(\mathcal{L}^*)=\mu_2(T^n\mathcal{L}^*) \qquad (\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\ )$$

が成り立つ．よって (3) と (4) により

$$\begin{aligned}\infty>\pi &= \mu_2(\{(x,\ y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x^2+y^2\leq 1\})\\ &= \mu_2(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n\mathcal{L}^*)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu_2(T^n\mathcal{L}^*)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu_2(\mathcal{L}^*)\end{aligned}$$

となる．これは 矛盾* であるから, $\mathcal{L}^*$ は２次元ルベーグ可測集合ではない.

例題１－１０として, 上記の証明における 矛盾* とはなにか．それを詳しく示せ.

（例題１－１０の解答）

$$\mu_2(\mathcal{L}^*)=0 \text{ ならば } \pi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu_2(\mathcal{L}^*)=0 \text{ であるし、}$$

$$\mu_2(\mathcal{L}^*)>0 \text{ ならば } \pi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu_2(\mathcal{L}^*)=\infty \text{ であるから.}$$

類題１－１０　上記のルベーグ非可測集合 $\mathcal{L}^*$ の構成のどの箇所で, 以下の選択公理を使用しているかを述べよ.

選択公理：　集合の集まり A_λ （$\lambda \in \Lambda$）において, どの集合 A_λ も空集合でなければ, 各 λ に対して A_λ からその要素 a_λ を 1 つずつ選び出すことが出来る.

（類題１－１０の解答）

「$a \in \mathbf{T},\ b \in \mathbf{T} \setminus \mathbf{T}_a,\ c \in \mathbf{T} \setminus \left(\mathbf{T}_a \bigcup \mathrm{bf\ T}_b\right),\ \cdots$ をとりだし, この操作を無限に繰り返して残りがなくなるまで行い

$$\mathcal{L} = \{a,\ b,\ c, \cdots\}$$

を構成する」という箇所である.