第１０章「可微分性」の演習問題

例題１０－１ 　次の関数は $x=0$ で微分可能かどうか判定しなさい.

(1) $f(x)=x^2+3$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

(**例題１０－１の解答**)

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$$

より $x=0$ で微分可能. $f'(0)=0$ である.

(2) $x=0$ で不連続なので微分不可能である.

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x} \quad \text{（ロピタルの定理）} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0 \quad \text{（ロピタルの定理）}\end{aligned}$$

より $x=0$ で微分可能. $f'(0)=0$ である.

(4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$|x\sin(1/x)|\leq|x|$ より極限は0. よって $x=0$ で微分可能. $f'(0)=0$ である.

(5) $x=0$ で不連続なので微分不可能である.

$\boxed{\textbf{類題９－２}}$　次の関数は $x=0$ で微分可能かどうか判定しなさい.

(1) $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} (1+x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

(3) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^4}$

(**類題１０－１の解答**)

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

極限が定まらないので, $x=0$ で微分不可能である.

(2) $x=0$ で不連続なので微分不可能である.

(3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\sqrt{x+x^2}$$

$\dfrac{|x|}{x}\sqrt{x+x^2} \leq \sqrt{x+x^2}$ より, 極限は 0. よって $x=0$ で微分可能であり, $f'(0)=0$.

$\boxed{\textbf{例題１０－２}}$　次の関数を微分しなさい.

(1) $\sqrt{1+x+x^2}$

(2) $\log(\tan x)$

(3) $\arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(4) x^x

(5) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\dfrac{x}{a}\right)$

(**例題１０－２の解答**)

(1) $y' = \left((1+x+x^2)^{1/2}\right)' = \dfrac{1+2x}{2\sqrt{1+x+x^2}}$

(2) $y' = \dfrac{(\tan x)'}{\tan x} = \dfrac{(\sec x)^2}{\tan x} = \dfrac{2}{\sin 2x}$

(3) $y' = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}\dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2-1}$

(4) $y = x^x$ とすれば, $\log y = x\log x$. よって $y'/y = \log x + 1$. $y' = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$

(5) $y' = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + a^2\dfrac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\dfrac{1}{a}\right) = \sqrt{a^2-x^2}$

類題１０－２

(1) $\log(x+\sqrt{x^2-1})$

(2) $(\log x)^x$

(3) $(\cos x + \sin x)^2$

(4) e^{1+x^2}

(5) $\arctan(\sec x + \tan x)$

(**類題１０－２の解答**)

(1) $\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(2) $y = (\log x)^x$ とすると $\log y = x\log\log x$. よって $y'/y = \log\log x + x\frac{1/x}{\log x}$. $y = (\log x)^x\left(\log\log x + \dfrac{1}{\log x}\right)$

(3) $y' = 2(\cos x + \sin x)(-\sin x + \cos x)$

(4) $y' = e^{1+x^2}2x$

(5) $y' = \dfrac{1}{1+(\sec x + \tan x)^2}(\sec x\tan x + \sec^2 x) = \dfrac{1}{2}$

例題１０－３　次の関数の n 次導関数を求め, $x = 0$ の周りでテイラー級数を４次まで計算しなさい.

(1) e^{x+1}

(2) $\cos^2 x$

(3) $(1+x)^3\log(1+x)$

(**例題１０－３の解答**)

(1) $y=e^{x+1}$, $y^{(n)}=ee^x$

$$y=e+ex+\frac{ex^2}{2}+\frac{ex^3}{6}+\frac{ex^4}{24}+\cdots$$

(2) $y=\cos^2 x=\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}$, $y^{(n)}=2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$

$$y=1+x^2+\frac{x^4}{4}+\cdots$$

(3) $y=(1+x)^3\log(1+x),\ y'=3(1+x)^2\log(1+x)+(1+x)^2,\ y''=6(1+x)\log(1+x)+5(1+x)$, $y'''=6\log(1+x)+11$,

$$y^{(n)}=\frac{6(-1)^n(n-4)!}{(1+x)^{n-3}}\quad(n\geq 4)$$

$$y=x+\frac{5x^2}{2}+\frac{11x^3}{6}+\frac{x^4}{4}+\cdots$$

類題１０－３　$x=0$ の周りでテイラー級数を４次まで計算しなさい.

(1) $\arctan x$
(2) $\sin^3 x$
(3) $e^x\sin x$

(**類題１０－３の解答**)

(1) $y=\arctan x$ とすると

$$(1+x^2)y^{(n+2)}+2(n+1)xy^{(n+1)}+n(n+1)y^{(n)}=0$$

が成り立つことに注意する．よって $y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=y^{(4)}(0)=0,\ y'''(0)=-2.$

$$y=x-\frac{x^3}{3}$$

(2) $y=\sin^3 x=\dfrac{3}{4}\sin x-\dfrac{1}{4}\sin 3x.$

$$y^{(n)}=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y=x^3+\cdots$$

(3) $y = e^x \sin x$. $y^{(n)} = 2^{n/2} e^x \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$

$$y = x + x^2 + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

例題１０－４　実数 $x \in \mathbf{R}$ からいちばん近い整数までの距離を

$$\phi(x) = \mathrm{dist}(x,\ \mathbf{Z})$$

で表すとき, 関数

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(10^n x)}{10^n}$$

は $\mathbf{R}$ 上連続であるが, どの実数 x においても微分可能ではないことを証明せよ.

(**例題１０－４の解答**)

任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して, $0 \leq \phi(10^n x) \leq \dfrac{1}{2}$ より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(10^n x)}{10^n}$ は $\mathbf{R}$ 上一様収束する. $\phi(x)$ は周期１の折線の連続関数であるから $\phi(10^n x)$ は $\mathbf{R}$ 上連続となる. よって連続関数列の一様収束極限は連続関数だから, $T(x)$ は $\mathbf{R}$ 上連続関数となる.

また $\phi(x)$ の周期は１だから $\phi(10^n(x+1)) = \phi(10^n x)$ となり, $T(x)$ も周期１の関数となる. 従って $0 \leq x < 1$ なる x に対して $T(x)$ が微分不可能であることを示せばよい. $x \in [0,\ 1)$ を１０進展開して

$$x = 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \quad (0 \leq a_n \leq 9)$$

ただし $0.a_1 a_2 \cdots a_n 99 \cdots$ は $0.a_1 a_2 \cdots (a_n + 1) 00 \cdots$ とする. このとき

$$\phi(10^n x) = \begin{cases} 0.a_{n+1} a_{n+2} \cdots & (a_{n+1} \leq 4) \\ 1 - 0.a_{n+1} a_{n+2} \cdots & (a_{n+1} \geq 5) \end{cases}$$

となる. ここで

$$h_m = \begin{cases} -10^{-m} & (a_m = 4,\ 9) \\ 10^{-m} & (a_m \neq 4,\ 9) \end{cases}$$

とおけば

$$x + h_m = 0.a_1 a_2 \cdots a'_m a_{m+1} \cdots, \quad a'_m = \begin{cases} a_m - 1 & (a_m = 4,\ 9) \\ a_m + 1 & (a_m \neq 4,\ 9) \end{cases}$$

よって $a'_m - a_m = 10^m h_m$ となるから

$$\phi(10^n(x+h_m)) - \phi(10^n x)$$
$$= \begin{cases} 0 & (n \geq m) \\ 10^{n-m}(a'_m - a_m) = 10^n h_m & (n < m,\ a_{n+1} \leq 4) \\ -10^{n-m}(a'_m - a_m) = -10^n h_m & (n < m,\ a_{n+1} \geq 5) \end{cases}$$

したがって

$$\frac{T(x+h_m) - T(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{m-1} \pm \frac{10^n h_m}{10^n h_m} = \sum_{n=0}^{m-1} \pm 1$$

は $m \to \infty$ のとき収束せず振動する. $m \to \infty$ のとき $h_m \to 0$ であるが, $\sum_{n=0}^{m-1} \pm 1$ が収束しないので関数 $T(x)$ は $0 \leq x < 1$ で微分可能ではない.

類題１０－４　$\mathbf{R}$ 上の関数：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos\left(a^k \pi x\right), \qquad (\ a,\ b \in \mathbf{R},\ |b| < 1,\ |ab| < 1\ )$$

は $\mathbf{R}$ 上 C^1- 級（１回連続微分可能）であることを証明しなさい.

(**類題１０－４の解答**)

$|b| < 1$ だから連続関数列 $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b^k \cos\left(a^k \pi x\right)$ は　$\mathbf{R}$ 上 $f(x)$ へ一様収束する. よって $f(x)$ も $\mathbf{R}$ 上連続である.

また $|ab| < 1$ より $f'_n(x) = -\sum_{k=0}^{n} \pi(ab)^k \sin\left(a^k \pi x\right)$ も $\mathbf{R}$ 上関数

$$g(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \pi(ab)^k \sin\left(a^k \pi x\right)$$

に一様収束する. よって $f'(x) = g(x)$ となるので $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上 C^1- 級となる.

例題１０－５　１変数関数

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

のグラフを以下の事項 (i) ～ (vi) に従って描きなさい.

(i) 定義域をきちんと定め, $f'(x)$ および $f''(x)$ を求めよ.
(ii) $f'(x) = 0$ となる x を求め, $f(x)$ の極値を調べよ.
(iii) $f''(x) = 0$ となる x を求め, $f(x)$ の凹凸および変曲点を調べよ.
(iv) $f(x)$ のグラフの漸近線を調べよ.
(v) $f(x)$ のグラフの増減表をつくりなさい.
(vi) 以上の情報をもとに $f(x)$ のグラフを描いてみなさい.

(**例題１０－５の解答**)

(i) 定義域は $\mathbf{R} \setminus \{-1,\ 1\}$. $f'(x)$ および $f''(x)$ は

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}$$

(ii) $f'(x) = 0$ となる x は $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$. 極大・極小の判定は

$$\begin{aligned}
&f''(-\sqrt{3}) < 0 \text{ より } x = -\sqrt{3} \text{ は極大で } f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\
&f''(0) = 0 \text{ より}, x = 0 \text{ は極大でも極小でもなく } f(0) = 0 \\
&f''(\sqrt{3}) > 0 \text{ より } x = \sqrt{3} \text{ 極小で } f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

(iii) $f(x)$ の凹凸および変曲点はそれぞれ

$$\begin{array}{rccl}
x < -1 & \text{のとき} & f''(x) < 0 & \text{より上に凸} \\
-1 < x < 0 & \text{のとき} & f''(x) > 0 & \text{より下に凸} \\
0 < x < 1 & \text{のとき} & f''(x) < 0 & \text{より上に凸} \\
1 < x & \text{のとき} & f''(x) > 0 & \text{より下に凸} \\
x = 0 & \text{は} & f''(0) = 0 & \text{となり変曲点である}
\end{array}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1-0} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty, \lim_{x\to 1+0} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty \text{ より } x = 1, \\
&\lim_{x\to -1-0} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty, \lim_{x\to -1+0} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty \text{ より } x = -1, \\
&f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}, \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0 \text{ より } y = x,
\end{aligned}$$

はそれぞれ $y = f(x)$ の漸近線である.

(v) $f(x)$ のグラフの増減表は

x											
y'											
y''											
y											

(vi) 以上により $f(x)$ のグラフは次のようになる.

類題１０－５　次の１変数関数について, $f'(x)$ を求め, そのグラフを描きなさい.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x},\ x \in \mathbf{R}$

(2) $f(x) = \dfrac{\log x}{x},\ x \in (0,\ \infty)$

(**類題１０－５の解答**)

(1) $f'(x) = \dfrac{x(2-x)}{e^x}$ であり, そのグラフは

(2) $f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x}$ であり, そのグラフは

例題１０－６　$x > 0$ のとき $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ を示しなさい.

(**例題１０－６の解答**)

$f(x) = \arctan x - \dfrac{x}{1+x^2}$ とすれば, $f(x)$ は連続で, $x > 0$ ならば $f'(x) = \dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0$ である. $f(0) = 0$, f は（狭義）単調増加であるから, $x > 0$ ならば $f(x) > 0$ となる.

$g(x) = x - \arctan x$ とすれば, $g(x)$ は連続で, $x > 0$ ならば $g'(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} > 0$ である. $g(0) = 0$, g は（狭義）単調増加であるから, $x > 0$ ならば $g(x) > 0$ となる.

類題１０－６　$0 < x < \pi/2$ のとき $\dfrac{2}{\pi} < \dfrac{\sin x}{x}$ を示しなさい.

(**類題１０－６の解答**)

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{2}{\pi}$ とすれば，$f(x)$ は連続で，$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ である．ここで $g(x)=x\cos x-\sin x$ とすれば $g'(x)$ は連続で，$0<x<\pi/2$ において $g'(x)=-x\sin x<0$ である．よって $g(0)=0$, g は（狭義）単調減少であるから $0<x<\pi/2$ ならば $g(x)<0$ となる．以上のことから $0<x<\pi/2$ ならば $f(\pi/2)=0$, f は（狭義）単調減少であるから，$f(x)>0$ となる．

例題１０－７ 次の関数の $(0,0)$ における偏導関数を求めなさい．

(1) $\sqrt{|xy|}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$

(**例題１０－７の解答**)

(1)

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

(2)

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{|k|}{k}=0$$

ともに極限が定まらないから偏導関数は存在しない．

類題１０－７

(1) $\sin(x-y)$

(2) $f(x)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$

(**類題１０－７の解答**)

(1)

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$
$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-\sin k}{k}=-1$$

(2)

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\times 0\times \sin\frac{1}{|h|}-0}{h}=0$$

同様に $f_y(0,0)=0$ である.

例題１０－８ 次の関数を偏微分しなさい.

(1) $\sin(5x+e^y)$
(2) $e^{-(x^2+y^2)}\log(xy)$
(3) $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$
(4) $x^y y^x$

(**例題１０－８の解答**)

(1) $f_x=5\cos(5x+e^y),\quad f_y=e^y\cos(5x+e^y)$
(2)

$$f_x=\left(-2x\log(xy)+\frac{1}{x}\right)e^{-(x^2+y^2)}$$
$$f_y=\left(-2y\log(xy)+\frac{1}{y}\right)e^{-(x^2+y^2)}$$

(3) $f_x=\dfrac{-y}{x^2+y^2},\quad f_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$
(4) $f_x=x^y y^x\left(\dfrac{y}{x}+\log y\right),\quad f_y=x^y y^x\left(\dfrac{x}{y}+\log x\right)$

類題１０－８ 次の関数を偏微分しなさい.

(1) $\dfrac{ax+by}{cx+dy}$
(2) $\log_y x$
(3) $e^{ax}(\sin by+\cos by)$

(4) $\arcsin(x \log y)$

(類題１０－８の解答)

(1) $f_x = \dfrac{(ad-bc)x}{(cx+dy)^2}, \quad f_x = \dfrac{-(ad-bc)y}{(cx+dy)^2}$
(2) $f_x = \dfrac{1}{x \log y}, \quad f_y = -\dfrac{\log x}{y(\log y)^2}$
(3) $f_x = ae^{ax}(\sin by + \cos by), \quad f_y = be^{x}(\cos by - \sin by)$
(4) $f_x = \dfrac{\log y}{\sqrt{1-(x\log y)^2}}, \quad f_y = \dfrac{x}{y\sqrt{1-(x\log y)^2}}$

例題１０－９ 次の関数のマクローリン級数を２次の項まで求めよ.

(1) $e^x \log(1+y)$
(2) $\sqrt{1-x^2-y^2}$

(例題１０－９の解答)

(1) $f(0,0)=0,\ f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=1,\ f_{xx}(0,0)=0,\ f_{xy}(0,0)=1,\ f_{yy}(0,0)=-1$ より

$$e^x \log(1+y) = y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \cdots$$

(2) $f(0,0)=1,\ f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=0,\ f_{xx}(0,0)=-1,\ f_{xy}(0,0)=0,\ f_{yy}(0,0)=-1$ より

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \cdots$$

類題１０－９ 次の関数のマクローリン級数を２次の項まで求めよ.

(1) $e^{ax}\cos by$
(2) $\sqrt{x+1}\sin y$

(類題１０－９の解答)

(1) $f(0,0)=1,\ f_x(0,0)=a,\ f_y(0,0)=0,\ f_{xx}(0,0)=a^2,\ f_{xy}(0,0)=$

$0,\ f_{yy}(0,0)=-b^2$ より

$$e^{ax}\cos by = 1+\frac{1}{2}(a^2x^2-b^2y^2)$$

(2) $f(0,0)=0,\ f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=1,\ f_{xx}(0,0)=0,\ f_{xy}(0,0)=1/2,\ f_{yy}(0,0)=0$ より

$$\sqrt{x+1}\sin y = y+\frac{1}{2}xy$$

例題１０－１０ $\mathbf{R}^2$ 上の２変数関数：

$$f(x,\ y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$$

の極値を調べよ.

(**例題１０－１０の解答**)

$$f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x,\ y)=4(x^3-x+y),\quad f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)=4(y^3-y+x)$$

であるから, $f_x=f_y=0$ を解くと

$$(x,\ y)=(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}),\quad (x,\ y)=(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}),\quad (x,\ y)=(0,\ 0)$$

を得る．さらに

$$f_{xx}\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\ y)=4(3x^2-1),\quad f_{yy}\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\ y)=4(3y^2-1)$$

$$f_{xy}\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,\ y)=4,\quad f_{yx}\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,\ y)=4$$

であるから $f(x,\ y)$ のヘッセ行列は

$$Hf(x,\ y)\equiv\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4(3x^2-1) & 4 \\ 4 & 4(3y^2-1)\end{pmatrix}$$

となる．ここで $(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$, $(0,\ 0)$ におけるヘッセ行列式と f_{xx} の符号を調べると

$(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}), (-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ については

$$\det\left(Hf(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})\right) = 384 > 0, \qquad f_{xx}(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}) = 20 > 0$$
$$\det\left(Hf(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})\right) = 384 > 0, \qquad f_{xx}(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}) = 20 > 0$$
$$\det\left(Hf(0,\ 0)\right) = 0$$

となる．よって $f(x,\ y)$ は $(\pm\sqrt{2},\ \mp\sqrt{2})$ でともに極小であり, その極小値は $f(\pm\sqrt{2},\ \mp\sqrt{2}) = -8$ となる.

$f(0,\ 0) = 0$ については

$$x = y \neq 0 \qquad ならば \qquad f(x,\ x) = 2x^4 > 0$$
$$x = 0,\ 0 \neq |y| < \sqrt{2} \qquad ならば \qquad f(0,\ y) = y^2(y^2 - 2) < 0$$

となる．このとき $(0,\ 0)$ の近くで $f(x,\ y)$ は $f(0,\ 0) = 0$ より大きくも小さくもなりうるので $f(0,\ 0) = 0$ は極値ではない.

類題１０−１０ $\mathbf{R}^2$ 上の２変数関数：

$$f(x,\ y) = x^3 + y^3 - x^2 + xy - y^2$$

の極値を調べよ.

(**類題１０−１０の解答**)

$$f_x = 3x^2 - 2x + y), \quad f_y = 3y^2 - 2y + x$$

より, $f_x = f_y = 0$ を解くと

$$(x,\ y) = (0,\ 0), \quad (x,\ y) = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

となる．$f(x,\ y)$ のヘッセ行列は

$$Hf(x,\ y) = \begin{pmatrix} 6x - 2 & 1 \\ 1 & 6y - 2 \end{pmatrix}$$

である．$(0,\ 0)$ および $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ におけるヘッセ行列式と f_{xx} の符号を調べると

$$\det\left(Hf(0,\ 0)\right) = 3 > 0, \quad f_{xx}(0,\ 0) = -2 < 0$$

より $f(0,\ 0)=0$ は極大.

$$\det\left(Hf\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)\right)=-1<0$$

より $f\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}$ は極値をとらない.

例題１０－１１　2 次曲線 $2x^2+2xy+3y^2=1$ の原点からの距離を求めよ.

(**例題１０－１１の解答**)

2 次曲線上の点 (x_0,y_0) で関数 x^2+y^2 を最小にするものを求め, その平方根が答えである.

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(2x^2+2xy+3y^2-1)$$

とすれば

$$F_x=2x-\lambda(4x+2y),\ F_y=2y-\lambda(2x+6y),\ F_\lambda=-(2x^2+2xy+3y^2-1)$$

ここで, $F_x=F_y=F_\lambda=0$ を満たす点を (x_0,y_0) とする. xF_x+yF_y を計算し, $F_\lambda=0$ を用いれば

$$x_0^2+y_0^2=\lambda$$

よって $F_x=F_y=0$ の式の両辺を λ で割ってこの関係を代入すれば

$$\begin{cases}(2-\frac{1}{x_0^2+y_0^2})x_0+y_0=0\\ x_0+(3-\frac{1}{x_0^2+y_0^2})y_0=0\end{cases}$$

となる. したがって $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ （自明でない解）より

$$\begin{vmatrix} 2-\frac{1}{x_0^2+y_0^2} & 1 \\ 1 & 3-\frac{1}{x_0^2+y_0^2}\end{vmatrix}=0$$

でなくてはならない. すなわち $\dfrac{1}{x_0^2+y_0^2}$ は行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値である. 以上のことから

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

を得る.

類題１０－１１　直方体の各辺の長さの和が 4ℓ で一定のとき, 表面積が最大のものを求めよ.

(**類題１０－１１の解答**)
　稜を x, y, z とすれば $x+y+z=\ell$ であり, 表面積は $S=2(xy+yz+zx)$ となる.

$$F(x,y,z,\lambda)=2(xy+yz+zx)-\lambda(x+y+z-\ell)$$

とし, $F_x=F_y=F_z=F_\lambda=0$ を解くと $\lambda=\frac{4}{3}\ell$ を得る. よって

$$x=y=z=\frac{\ell}{3}$$

となることが分かる. すなわち立方体である.