第１１章「積分」の演習問題

例題１１－１　次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$

（例題１１－１の解答）

(1) $\displaystyle\frac{1}{x^3} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$　より

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x^3+1}dx \\
=\ & \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \\
=\ & \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

(2) $t = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$ とおくと $x-1 = \dfrac{1}{1-t^2}$.　このとき $\dfrac{dx}{x-1} = \dfrac{2tdt}{1-t^2}$ となり

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}dx \\
=\ & \int \frac{2}{1-t^2}dt = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt \\
=\ & \log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C = \log\left|\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1}}\right| + C
\end{aligned}$$

(3) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx &= \int \frac{1+2t+t^2}{2t}dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t}+t+2\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\log|t| + \frac{1}{4}t^2 + t + C \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

類題１１－１　次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$

(類題１１－１の解答)

(1) $\displaystyle -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{6}\log\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

(2) $\displaystyle \arctan\frac{x}{2} + C$

(3) $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right) + C$

例題１１－２　次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})dx$

(例題１１－２の解答)

(1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$ より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}dx = \int_0^1 \frac{2}{t^2+3}dt$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx \\
=\ &\int_0^1 \left(\sqrt{x^2+4} - \frac{4}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx \\
=\ &\left[\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+4} + 4\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\right\} - \right. \\
&\qquad\qquad \left. 4\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\right]_0^1 \\
=\ &\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} - 2\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\right]_0^1 \\
=\ &\frac{1}{2}\sqrt{5} - 2\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

(3) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $x = t^2,\ dx = 2tdt$ より

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})dx \\
=\ &\int_0^1 2t\log(1+t)dt \\
=\ &\left[t^2\log(1+t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt \\
=\ &\log 2 - \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt \\
=\ &\log 2 - \left[\frac{t^2}{2} - t + \log|t+1|\right]_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

類題１１－２ 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx$

（類題１１－２の解答）

(1) $\cos x = t$ とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = [\log(1+t)]_0^1 = \log 2$$

(2) $x = \tan t$ とおくと

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t^2 dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

(3) $x = \dfrac{\pi}{4} - t$ とおくと

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\frac{2}{1+\tan t}\right) dt = \frac{\pi}{4}\log 2 - I$$

より $I = \dfrac{\pi}{8}\log 2$

例題１１－３　次の定積分（多変数）を計算せよ.

(1) $\iint_{D_2} (x^2+y^2)dxdy, \quad D_2$ は $y \geq 0,\ y \leq x,\ x \leq 1$

(2) $\iiint_{D_3} xyz(x+y+z)dxdydz,$
D_3 は $x+y+z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

(3) $\int\int \cdots \int_{D_n} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$
D_n は $0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, 2, \cdots, n$

（例題１１－３の解答）

(1)

$$\begin{aligned}\int\int_{D_2}(x^2+y^2)dxdy &= \int_0^1 \left\{\int_0^x (x^2+y^2)dy\right\} dx \\ &= \int_0^1 \frac{4}{3}x^3 dx = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\iiint_{D_3} xyz(x+y+z)dxdydz \\ &= \int_0^1 \left\{\int_0^{1-x} \left\{\int_0^{1-x-y} xyz(x+y+z)dz\right\} dy\right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{\int_0^{1-x} xy\frac{x+y+2}{6}(1-x-y)^2 dy\right\} dx\end{aligned}$$

ここで被積分関数を $x(x+y-1-x+1)\dfrac{x+y-1+3}{6}(1-x-y)^2$
と変形して変数変換して積分すれば

$$= \int_0^1 x\left\{-\frac{1}{30}(x-1)^5 + \frac{x-4}{24}(x-1)^4 + \frac{x-1}{6}(x-1)^3\right\}dx$$
$$= \int_0^1 \left\{\frac{1}{120}(x-1)^6 + \frac{1}{20}(x-1)^5 + \frac{1}{24}(x-1)^4\right\}dx = \frac{1}{840}$$

(3)

$$\iint\cdots\int_{D_n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$$
$$= \int_0^1\left\{\cdots\left\{\int_0^1\left\{\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)dx_1\right\}dx_2\right\}\cdots\right\}dx_n$$
$$= \int_0^1\left\{\cdots\left\{\int_0^1\left(\frac{1}{3}+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)dx_2\right\}\cdots\right\}dx_n = \frac{n}{3}$$

類題１１－３　次の定積分（多変数）を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_2}\exp\left(\frac{y}{x}\right)dxdy,\quad D_2$ は $y \geq 0,\ y \leq x,\ x \leq 1$
(2) $\displaystyle\iiint_{D_3}(x^2+y^2+z^2)dxdydz,$
D_3 は $x+y+z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$
(3) $\displaystyle\iint\cdots\int_{D_n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n,$
D_n は $0 \leq x_i \leq 1,\ i=1,2,\cdots,n$

（類題１１－３の解答）

(1)

$$\iint_{D_2}\exp\left(\frac{y}{x}\right)dxdy = \int_0^1\left\{\int_0^x\exp\left(\frac{y}{x}\right)dy\right\}dx = \frac{e-1}{2}$$

(2)

$$\iiint_{D_3}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$
$$= \int_0^1\left\{\int_0^{1-x}\left\{\int_0^{1-x-y}(x^2+y^2+z^2)dz\right\}dy\right\}dx = \frac{1}{20}$$

(3)

$$\iint\cdots\int_{D_n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$= \int_0^1 \left\{ \cdots \left\{ \int_0^1 \left\{ \int_0^1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) dx_1 \right\} dx_2 \right\} \cdots \right\} dx_n$$
$$= \int_0^1 \left\{ \cdots \left\{ \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + x_2 + \cdots + x_n \right) dx_2 \right\} \cdots \right\} dx_n = \frac{n}{2}$$

$\boxed{\textbf{例題１１－４}}$ 変数変換をうまく使って次の定積分を計算せよ.

(1) $\iint_{D_2} x^2 dxdy, \quad D_2$ は $x^2 + y^2 \leq 1$

(2) $\iint_{D_2} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} dxdy, \quad D_2$ は $0 \leq y \leq \max\{x,\ 1 - x\}$

(3) $\iiint_{D_3} x^2 dxdydz, \quad D_3$ は $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

(例題１１－４の解答)

(1)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

と変数変換して, $dxdy = rdrd\theta$ および $0 \leq r < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ であるから

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} x^2 dxdy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^3 \cos^3\theta dr \right) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{cases} X = x + y \\ Y = x - y \end{cases}$$

と変数変換して, $dxdy = \dfrac{1}{2} dXdY$ および $0 \leq X \leq 1$, $0 \leq Y \leq X$ であるから

$$\iint_{D_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^X \frac{1}{2\sqrt{XY}} dY \right) dX = \int_0^1 dX = 1$$

(3)

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

と変数変換して, $dxdydz = r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$ および $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ であるから

$$\iiint_{D_3} x^2 dxdydz = \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^4 \sin^3\theta \cos^2\varphi dr \right) d\varphi \right\} d\theta = \frac{4}{15}\pi$$

類題１１－４ 変数変換をうまく使って次の定積分を計算せよ.

(1) $\iint_{D_2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy,\quad D_2$ は $x^2+y^2 \leq 2x$

(2) $\iint_{D_2} \exp\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right) dxdy,\quad D_2$ は $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1$

(3) $\iiint_{D_3} x^2 dxdydz,\quad D_3$ は $x^2+y^2+|z| \leq 1$

（類題１１－４の解答）

(1) $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ であり

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

と変数変換して, $dxdy = rdrd\theta$ および $0 \leq r < 2\cos\theta$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\iint_{D_2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} r^4 dr \right) d\theta = \frac{512}{75}$$

(2)

$$\begin{cases} X = x+y \\ Y = x-y \end{cases}$$

と変数変換して, $dxdy = \dfrac{1}{2} dXdY$ および $0 \leq X \leq 1$, $-X \leq Y \leq X$ であるから

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_{-X}^{X} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{Y}{X}\right) dY \right\} dX \\ &= \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}
$$

と変数変換して, $dxdydz = rdrd\theta dz$ および $r^2 + z \leq 1$, $z \geq 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
&\iiint_{D_3} x^2 dxdydz \\
&= 2\iint\int_{x^2+y^2+z\leq 1,\ z\geq 0} x^2 dxdydz \\
&= 2\iint\int_{r^2+z\leq 1,\ z\geq 0} r^3\cos^2\theta drd\theta dz \\
&= 2\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\left(\int_0^{1-r^2} r^3\cos^2\theta dz\right)dr\right\}d\theta = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

例題１１－５ 以下の広義積分の事柄についてそれぞれ証明せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束する

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ は発散する

（例題１１－５の解答）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x} = 1$ より下端の収束は問題ないので, 上端についての収束をコーシーの収束条件を用いて示す. 任意の $\varepsilon >$ に対して, $\dfrac{2}{K} < \varepsilon$ となるように $K > 0$ をとり $t_2 > t_1 > K$ ならば

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sin x}{x}dx\right| \\
= &\left|\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\cos x}{x^2}dx\right| \\
\leq &\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{x^2}dx \leq \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \frac{2}{t_1} < \frac{2}{K} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

従って $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束する.

(2) $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対して

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi+t}dt>\frac{1}{n\pi+\pi}\int_0^{\pi}\sin tdt=\frac{2}{(n+1)\pi}$$

ゆえに

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx>\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\to\infty\quad(n\to\infty)$$

より発散する.

類題１１－５　$f:[0,\ \infty)\longrightarrow\mathbf{R}$ は連続関数で, 十分大きな x に対して $|f(x)|\leq x^N$ となるならば, 広義積分

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}f(x)dx$$

は収束することを証明せよ. ただし N はある正の定数である.

（類題１１－５の解答）

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}x^{N+2}=0$ だから, 関数 $e^{-x^2}x^{N+2}$ は $[0,\ \infty)$ において有界. すなわち, ある定数 $M>0$ が存在して $e^{-x^2}x^{N+2}<M\ (\forall x\in[0,\ \infty))$ よって $e^{-x^2}x^N<\dfrac{M}{x^2}\ (\forall x\in(0,\ \infty))$ である. 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\dfrac{1}{K}<\dfrac{\varepsilon}{2M}$ となるように定数 $K>0$ をとれば $t_2>t_1>K$ ならば

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}e^{-x^2}f(x)dx\right|\leq\int_{t_1}^{t_2}e^{-x^2}x^Ndx<M\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{x^2}dx<\varepsilon$$

従って $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}f(x)dx$ は収束する.

例題１１－６　次の広義積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1\log xdx$

（例題１１－６の解答）

(1) $0 \le N < 1$ なる N に対して $[0,\ N]$ において $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は可積分.
よって

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{N\to 1-0}\int_0^N \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{N\to 1-0}\left[\arcsin x\right]_0^N = \frac{\pi}{2}$$

(2) $0 \le N < \infty$ なる N に対して $[0,\ N]$ において $\dfrac{1}{x^2+1}$ は可積分.
よって

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{N\to\infty}\left[\arctan x\right]_0^N = \frac{\pi}{2}$$

(3) $0 < N \le 1$ なる N に対して $[N,\ 1]$ において $\log x$ は可積分. よって

$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{N\to 0+0}\int_N^1 \log x dx = \lim_{N\to 0+0}\left[x\log x - x\right]_N^1 = -1$$

類題１１－６　次の広義積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$
(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx$
(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^\alpha}dx$　(ただし $0<\alpha<1$)

（類題１１－６の解答）

(1) $t = e^x$ とおいて

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx\\ &= \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{3}\int_1^N \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{6}\int_1^N \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx\right.\\ &\qquad\left. + \frac{1}{2}\int_1^N \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx\right\} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\log x}{x^\alpha}dx &= \lim_{N\to 0+0}\left\{\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\log x\right]_N^1 - \frac{1}{1-\alpha}\int_N^1 x^{-\alpha}dx\right\} \\ &= -\frac{1}{(1-\alpha)^2}\end{aligned}$$

例題１１－７　$f : [1,\ \infty) \longrightarrow [0,\ \infty)$ が単調減少関数であるとき, 次の (i) (ii) は同値であることを証明せよ.（オイラー・マクローリンの判定法）

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束する

(ii) $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ が収束する

（例題１１－７の解答）

$f(x) \geq 0$ より, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_n = \int_1^n f(x)dx \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

と定義すると, 単調増加数列となるから (ii) が成り立つことは数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界であることと同値である. また $f(x)$ が単調減少関数で $f(x) \geq 0$ であるから $n \leq x \leq n+1$ ならば $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$ となる. よって

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq f(n+1)$$

より

$$\sum_{n=1}^{m} f(n) \geq a_{m+1} \geq \sum_{n=1}^{m} f(n+1)$$

すなわち $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界であることは単調増加数列 $\{\displaystyle\sum_{n=1}^{m} f(n)\}_{m=1}^{\infty}$ が上に有界であることと同値である. これは (i) が成り立つことと同値である.

類題１１－７　オイラー・マクローリンの判定法を利用して次のリーマンのゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

が $s>1$ のとき収束し, $s \leq 1$ のとき発散することを証明せよ.

(類題１１－７の解答)

$s \geq 0$ のときは $\dfrac{1}{n^s}$ は $n \to \infty$ のとき 0 に収束しないので $\zeta(s)$ は発散.

$f(x) = \dfrac{1}{x^s}$ とおくと, $s>0$ ならば $f:[1,\ \infty) \longrightarrow (0,\ \infty)$ は単調減少であり, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ は

$$\begin{array}{lll} s>1 & \text{のとき} & \dfrac{1}{s-1} \text{ に収束} \\ s<1 & \text{のとき} & \infty \text{ となり発散} \\ s=1 & \text{のとき} & \displaystyle\lim_{x\to\infty}\log x = \infty \text{ より発散} \end{array}$$

ゆえにオイラー・マクローリンの判定法により $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は $s>1$ のとき収束し, $s \leq 1$ のときは発散する.

例題１１－８ 次の２変数広義積分

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

は収束することを示し, その値を計算せよ. またこれを利用して

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を示せ.

(例題１１－８の解答)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

と変数変換して, $dxdy = rdrd\theta$ および領域 $\mathbf{R}^2$ は

$$D_R = \{(r\cos\theta,\ r\sin\theta) \mid 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

として $\mathbf{R}^2 = \displaystyle\lim_{R\to\infty} D_R$ であるから

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} re^{-r^2} drd\theta \\ &= \lim_{R\to\infty} 2\pi \int_0^R re^{-r^2} dr \\ &= \lim_{R\to\infty} 2\pi \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R = \pi \end{aligned}$$

また
$$\left(\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}dx\right)^2 = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi$$
より $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を得る.

類題１１－８ 次の広義積分の収束・発散を判定し, 収束するものについてはその値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad D$ は $0 \leq x \leq y \leq 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy, \quad D$ は $x^2+y^2 \leq 1$

（類題１１－８の解答）

(1) $D = \{(x,\ y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ に対して
$$D_n = \{(x,\ y) \mid 0 \leq x \leq y,\ \frac{1}{n} \leq y \leq 1\}$$
とすれば $D = \lim_{n\to\infty} D_n$ である.
$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\right)dy \\ &= \lim_{n\to\infty}\log\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = \log\left(1+\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

(2) $D = \{(x,\ y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ に対して
$$D_n = \{(x,\ y) \mid \frac{1}{n^2} \leq x^2+y^2 \leq 1\}$$
とすれば $D = \lim_{n\to\infty} D_n$ である.
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$
と極座標変換することにより
$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy &= \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{1}{x^2+y^2}dxdy \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{r}dr\right)d\theta \\ &= \lim_{n\to\infty} 2\pi\log n = \infty\end{aligned}$$

例題１１－９ 関数 $f(x),\ g(x)$ をそれぞれ $[a,\ b]$ 上で定義された実数値連続関数とするとき, 次の不等式（コーシー・シュワルツの不等式）を証明せよ.

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

（例題１１－９の解答）

任意の実数 $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$0 \leq \int_a^b (tf(x)+g(x))^2\, dx = At^2 + Bt + C$$

ただし $A = \int_a^b |f(x)|^2 dx,\ B = \int_a^b f(x)g(x)dx,\ C = \int_a^b |g(x)|^2 dx$ とする. $A = 0$ のときは $f(x) = 0 \quad (\forall x \in [a,\ b])$ より, 不等式は 0 として成り立つ. $A > 0$ のときは $At^2 + Bt + C \geq \ 0\ (\forall t \in \mathbf{R})$ より, その判別式は $4B^2 - 4AC \leq 0$ だから, $B^2 \leq AC$ より $|B| \leq A^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}$ となるから

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ.

類題１１－９ 関数 $f(x),\ g(x)$ をそれぞれ $[a,\ b]$ 上で定義された実数値連続関数とし, 1 より大きい 2 つの正の数 $p,\ q$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たすとする. このとき, 次の不等式（ヘルダーの不等式）を証明せよ.

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

（類題１１－９の解答）

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \quad \text{または} \quad \int_a^b |g(x)|^q dx = 0 \quad \text{のときは}$$

$f(x)g(x) = 0\ (\forall x \in [a,\ b])$ より不等式は 0 として成り立つ. それ以外のときは

$$\alpha = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \geq 0, \quad \beta = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \geq 0$$

とおいて, 不等式

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q \quad (\text{ただし} \quad \alpha \geq,\ \beta \geq 0)$$

を適用すれば

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \int_a^b |f(x)g(x)| dx \\
&\leq \frac{1}{p\int_a^b |f(x)|^p dx} \int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{1}{q\int_a^b |g(x)|^q dx} \int_a^b |g(x)|^q dx \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ.

例題１１－１０　有界な関数 $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbf{R}$ がリーマン可積分であることの必要十分条件は, $f(x)$ の不連続点の集合 B_f すなわち

$$B_f \equiv \{x \in [a,\ b] \mid x \text{ で } f(x) \text{ は不連続}\}$$

が, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\mathbf{R}$ 内の有界閉区間の列 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ がとれて, $|I_n|$ を区間 I_n の長さを表すものとするとき

$$B_f \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad \text{および} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$$

とできることである.（ これを B_f は零集合であるという ）

　この命題を既知なるものとし, 以下の関数がリーマン可積分かどうかを調べよ.

(1) $f : [0,\ 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ をディリクレ関数, すなわち

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\ x \text{ は有理数 }) \\ 0 & (\ x \text{ は無理数 }) \end{cases}$$

(2) $f : [0,\ 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ とし

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (\ x \text{ は無理数 }) \\ \dfrac{1}{q} & (\ x \text{ は有理数. 既約分数で } x = \dfrac{p}{q} \text{ とかける}) \end{cases}$$

（例題１１－１０の解答）

(1) ディリクレ関数 $f : [0,\ 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ の不連続点の集合 B_f は $B_f = [0,\ 1]$ だから $|B_f| = 1$ なので, これは明らかに零集合ではない．よって f はリーマン可積分ではない.

(2) この関数 f の不連続点の集合 B_f は $B_f = \{x \in [0,\ 1] \mid x \text{ は有理数}\}$ であり, これは $|B_f| = 0$ なので零集合である．よって f はリーマン可積分である.

類題１１－１０ 以下の関数がリーマン可積分かどうかを調べよ.

(1) $f : [-1,\ 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ とし

$$f(x) = \begin{cases} x & (\ x \text{ は有理数 }) \\ -x & (\ x \text{ は無理数 }) \end{cases}$$

(2) $f : [0,\ 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ とし, $[0,\ 1]$ 内の有理数を小さい順に番号をつけて, それらを $q_1 (= 0), q_2, q_3, \cdots, q_n, \cdots$ とする．すなわち

$$\{q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n, \cdots\} = \{[0,\ 1] \text{ 内の有理数列 }\}$$

このとき $f(x)$ を以下の様に定める.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}, \qquad (\ x \text{ が } q_n \leq x < q_{n+1} \text{ のとき })$$

（類題１１－１０の解答）

(1) この関数 f の不連続点の集合は $B_f = \{x \in [-1,\ 1] \mid x \neq 0\}$ であり, これは $|B_f| = 1$ なので零集合ではない．よって f はリーマン可積分ではない.

(2) この関数 f の不連続点の集合は $B_f = \{q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n, \cdots\}$ であり, これは $|B_f| = 0$ なので零集合である．よって f はリーマン可積分である.