第１２章「微分方程式」の問題

例題１２－１　$\dfrac{dy}{dx} = -xy^2$ を解け.

（例題１２－１の解答）　変数分離形であるので変形して両辺を積分すると,

$$\int -\frac{1}{y^2} dy = \int x dx$$

$$y = \frac{2}{x^2 + C} \quad (C \text{ は積分定数}).$$

類題１２－１　以下の変数分離型微分方程式を解きなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = xy$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$.

(5) $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$.

(6) $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$.

(7) $x\dfrac{dy}{dx} + 1 = y$.

(8) $y + y' = 2xy'$.

以下の問題は初期条件に注意して解きなさい.

(9) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}, y(1) = 2$

(10) $\dfrac{dy}{dx} = y \sin x, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

（類題１２－１の解答）

(1) $y = -\log(C - e^x)$

(2) $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

(3) $x^2 + y^2 = C$

(4) $y = \log(e^x + C)$

(5) $y = 0, \dfrac{1}{y} = -\dfrac{x^2}{2} + C$

(6) $y = \left(\dfrac{x^2}{4} + 1\right)^2$

(7) $y = Cx + 1$

(8) $y^2 = C(2x - 1)$

(9) $y = 2x$

(10) $y = e^{-\cos x}$

例題１２－２ $\dfrac{dy}{dx} = y + x$ を解きなさい.

（例題１２－２の解答） $\dfrac{dy}{dx} = y$ の解 $y = C\exp(x)$ を用いて, $y = C(x)\exp(x)$ とおいて, $C(x)$ に関する微分方程式をつくることにより求める.

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)\exp(x) + C(x)\exp(x) = C(x)\exp(x) + x$$

$$C'(x)\exp(x) = x$$

$$C'(x) = \exp(-x)x$$

$$C(x) = \int \exp(-x)xdx$$

ゆえに求める解は

$$y = \int \exp(-x)xdx \exp(x) = y = Ce^x - x - 1$$

.

類題１２－２ 以下の線形微分方程式を解きなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2y + e^x$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} + 1$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = -y \sin x + \sin x$

（類題１２－２の解答）

(1) $y = Ce^{2x} - e^x$

(2) $y = Cx^2 - x$

(3) $y = Ce^{\cos x} x + 1$

例題１２－３ $\dfrac{y^2}{x^2} + (1 - \dfrac{y}{x})\dfrac{dy}{dx} = 0$ を解きなさい.

（例題１２－２の解答） 同次型であるので $u = \dfrac{y}{x}$ とおくと

$$u^2 + (1-u)(u + xu') = 0$$

$$u + x(1-u)u' = 0$$

$$\left(u - \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x}$$

となり両辺を積分することより

$$u - \log u = \log x + C$$

$$\frac{y}{x} - \log \frac{y}{x} = \log x + C$$

$$\frac{y}{x} - \log y = +C$$

$$y = \exp \frac{y}{x}$$

類題１２－３ 以下の同次型微分方程式を解きなさい.

(1) $x\tan\dfrac{y}{x} - y + x\dfrac{dy}{dx} = 0$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + y^2}{x^2}$

（類題１２－３の解答）

(1) $\sin\dfrac{y}{x} = \dfrac{C}{x}$

(2) $y = -\dfrac{x}{\log x + C}$

例題１２－４ $y' = \dfrac{1}{x}y + xy^3$ を解きなさい.

（例題１２－４の解答） ベルヌイ型である．両辺に y^{-3} をかけて

$$y^{-3}y' = \frac{1}{x}y^{-2} + x$$

両辺に $1 - \alpha = 1 - 3 = -2$ をかけて

$$-2y^{-3}y' = -2\frac{1}{x}y^{-2} - 2x$$

ここで $u = y^{-2}$ とおくと与えられた微分方程式は

$$u' = -\frac{2}{x}u - 2x$$

となる．これは線形微分方程式（例題１２－２）である．u を求めると

$$\begin{aligned} u &= e^{\int -\frac{1}{x}dx}\left(\int(-2x)e^{\int -\frac{1}{x}dx} + C\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(-2\int x \cdot x^2 dx + C\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{4}x^4 + C\right) \\ &= \frac{-x^4 + C}{2x^2} \end{aligned}$$

$u = \dfrac{1}{y^2}$ なので

$$y = \frac{4x^4}{(C - x^4)^2}$$

類題１２－４ $y' = -y\cos x + y^2\cos x$ を解きなさい.

(**類題１２－４の解答**)

$$y = \frac{1}{Ce^{\sin x} + 1}$$

例題１２－５ $(3x^2y^2 + 8x^3)dx + (3y^2 + 2x^3y)dy = 0$ を解きなさい.

（**例題１２－５の解答**）

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y$$

より完全微分形になっているので

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 3x^2y^2 + 8x^3, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3y^2 + 2x^3y$$

となる $F(x,y)$ を求める. 一つ目の式より

$$F(x,y) = \int (3x^2y^2 + 8x^3)dx = x^3y^2 + 2x^4 + \phi(y)$$

二つ目の式に代入して

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^3y + \phi'(y) = 3y^2 + 2x^3y$$

$$\phi'(y) = 3y^2$$

$$\phi(y) = y^3 + C$$

よって求める解は

$$F(x,y) = x^3y^2 + 2x^4 + y^3 + C = 0$$

類題１２－５ $(\sin x + \sin y)dx + (e^y + x\cos y)dy = 0$ を解きなさい.

(**類題１２－５ の解答**)

$$-\cos x + x\sin y + e^y + C = 0$$

例題１２－６ $(3xy + y^3)dx + 4xy^2dy = 0$ を解きなさい.

(**例題１２－６の解答**) 積分因子をみつけるため両辺に $x^{\alpha}y^{\beta}$ をかける．

$$(3x^{\alpha+1}y^{\beta}+x^{\alpha}y^{\beta+3})dx+4x^{\alpha+1}y^{\beta+2}dy=0$$

$$\frac{\partial(3x^{\alpha+1}y^{\beta}+x^{\alpha}y^{\beta+3})}{\partial y}=\frac{\partial(4x^{\alpha+1}y^{\beta+2})}{\partial x}$$

が成り立つには

$$3(\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta}+(\beta+3)x^{\alpha}y^{\beta+2}=4(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+2}$$

とればよい．両辺の次数の同じ項の係数を比較すると

$$4(\alpha+1)=\beta+3, 3(\beta+1)=0$$

$$\alpha=-\frac{1}{2}, \quad \beta=-1$$

よって

$$x^{-\frac{1}{2}}y^{-1}$$

が積分因子である．したがってこれを両辺にかけた微分方程式

$$(3x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{2})dx+4x^{\frac{1}{2}}ydy=0$$

は完全微分形である．そこで

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=3x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{2}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=4x^{\frac{1}{2}}y$$

となる $F(x,y)$ を探せばよい．前と同様にして

$$F=2x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}y^{2}+\phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=4x^{\frac{1}{2}}y+\phi'(y)$$

$$\phi'(y)=0$$

$$\phi(y)=C$$

よって求める解 $F(x,y)=0$ は

$$2x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}y^{2}+C=0$$

$\boxed{\textbf{類題１２－６}}$ $(x+2y)dx-(x+3x^3y^2)dy=0$ を解きなさい.

(**類題１２－６ の解答**) 積分因子は y^{-3}.

$$x^3+\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}=C$$

$\boxed{\textbf{例題１２－７}}$ $y''-2y'-3y=0$ を解きなさい.

(**例題１２－７の解答**) 特性方程式 $P(z)=z^2-2z-3=0$ を解くと

$$(z-3)(z+1)=0$$

$$z=-1,3$$

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$$

$\boxed{\textbf{類題１２－７}}$ 次の微分方程式を解きなさい.

(1) $y''-4y=0$

(2) $y''+2y'+y=0$

(3) $y''+y=0, y'(0)=1, y(0)=0$

(4) $y'''-2y''-5y'+6y=0$

(**類題１２－７ の解答**)

(1) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

(2) $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$

(3) $y=\sin x$

(4) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+C_3e^{3x}$

$\boxed{\textbf{例題１２－８}}$ $(D^2-D-6)y=e^{3x}$ を解きなさい.

(**例題１２－８の解答**) $(D^2-D-6)y=0$ を解くと

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}$$

$$(D+2)(D-3)y = e^{3x}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{D-3}\frac{1}{D+2}e^{3x} \\ &= \frac{1}{D-3}\frac{1}{5}e^{3x} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{D-3}e^{3x} \\ &= \frac{1}{5}xe^{3x} \end{aligned}$$

よって一般解は

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} + \frac{x}{5}e^{3x}$$

類題１２－８ $(D^2+1)y = \cos x$ を解きなさい.

(**類題１２－８の解答**)

$$y = A\cos x + B\sin x + \frac{x\sin x}{2}$$

例題１２－９ 次の一階連立微分方程式を解きなさい.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y \end{cases}$$

(**例題１２－９ の解答**)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\frac{d}{dt}X(t) = Ax(t)$$

となる. $|A-\lambda E| = 0$ を解き，固有値を求めると $\lambda = 2, 4$ となる.

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 4$ に対する固有ベクトルは

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので一般解は

$$X(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる.

類題１２－９ 以下の連立一階線形微分方程式解きなさい.

(1)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

(**類題１２－９の解答**)

(1)

$$\begin{cases} x = C_1 \cosh t + C_2 \sinh t \\ y = C_1 \sinh t + C_2 \cosh t \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x = Ce^t \sin(t + \alpha) \\ y = Ce^t \cos(t + \alpha) \end{cases}$$