

## 第4章「関係」の問題

**例題4 - 1**  $A = \{\text{山, 川, 海}\}$ ,  $B = \{\text{動, 静}\}$  のとき直積集合  $A \times B$  と  $B \times A$  をかきなさい.

(例題4 - 1の解答)

$$A \times B = \{(\text{山, 動}), (\text{山, 静}), (\text{川, 動}), (\text{川, 静}), (\text{海, 動}), (\text{海, 静})\}$$

$$B \times A = \{(\text{動, 山}), (\text{動, 川}), (\text{動, 海}), (\text{静, 山}), (\text{静, 川}), (\text{静, 海})\}$$

**類題4 - 1**  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  のとき, 直積集合  $A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $B \times B$  をかきなさい.

(類題4 - 1の解答)

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

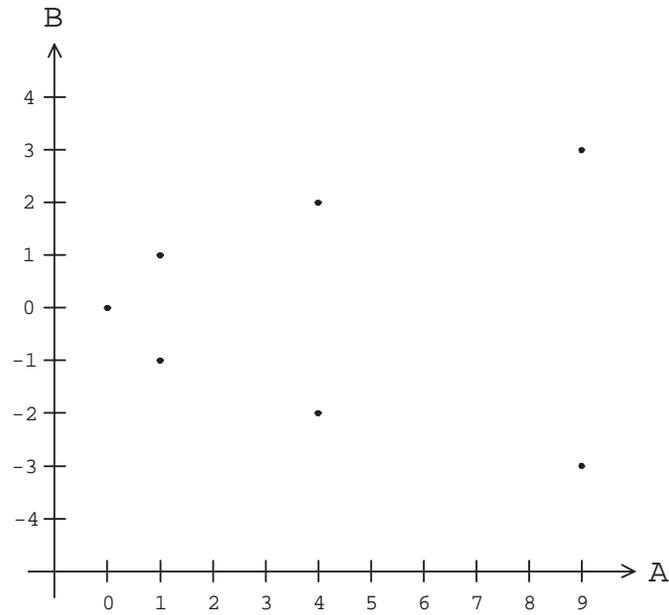
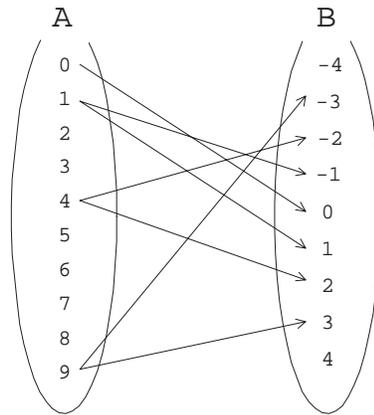
$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

**例題4 - 2**  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$  のとき関係  $f: A \rightarrow B$ ,  $b = f(a)$  を “ $b^2 = a$ ” と定めたとき  $G_f$  を集合, 矢線図, 座標図で表しなさい.

(例題4 - 2の解答)

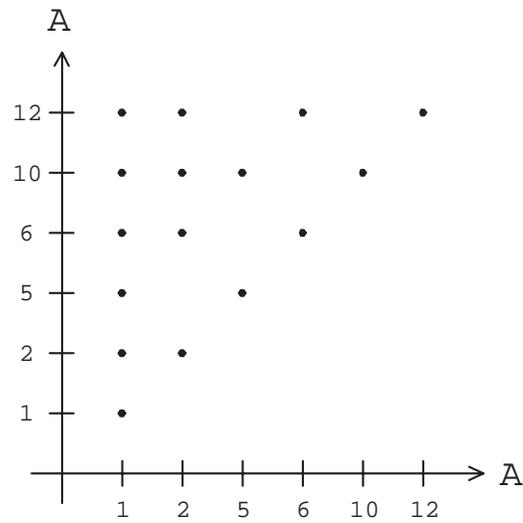
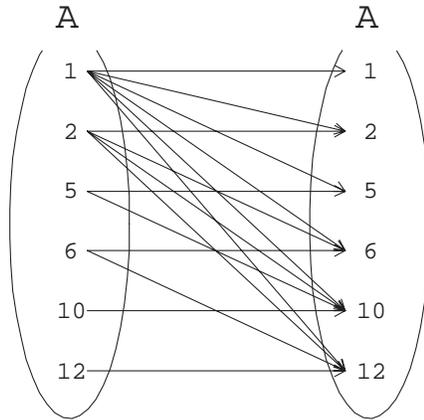
$$G_f = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2), (9, -3), (9, 3)\}$$



**類題 4 - 2**  $A = \{1, 2, 5, 6, 10, 12\}$  上の関係  $f$  を  $y = f(x) := x|y$  とする.  $G_f$  を集合, 矢線図, 座標図で表しなさい.

( 類題 4 - 2 の解答 )

$$G_f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (1, 10), (2, 2), (2, 6), (2, 10), (5, 5), (5, 10), (6, 6), (6, 12), (10, 10), (12, 12)\}$$



**例題 4 - 3**  $\mathbb{N}$  上の関係  $b = f(a)$  を “ $a + b = 5$ ” とするとき,  $f$  は反射律, 対称律, 反対称律, 推移律のどれをみたすか.

(例題 4 - 3 の解答)

$$G_f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

$f(1) \neq 1$  より反射律はみたさない.

$f(1) = 4, f(4) = 1$  と  $f(2) = 3, f(3) = 2$  より対称律をみたす.

$f(1) = 4, f(4) = 1 \Rightarrow 1 \neq 4$  より反対称律はみたさない.

$f(1) = 4, f(4) = 1 \Rightarrow f(1) \neq 1$  より推移律はみたさない.

**類題 4 - 3**  $\mathbb{N}$  上の関係  $b = f(a)$  を “ $a + 4b = 10$ ” とするとき,  $f$  は反射律, 対称律, 反対称律, 推移律のどれをみたすか.

(類題 4 - 3 の解答)

$$G_f = \{(2, 2), (6, 1)\}$$

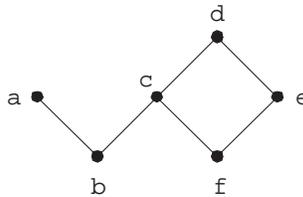
$f(2) = 2$  であるが,  $f(6) \neq 6$  より反射律はみたさない.

$f(6) = 1$  であるが  $f(1)$  が定義されない所以对称律はみたさない.

$f(2) = 2$  より反対称律をみたす.

$f(2) = 2$  より推移律をみたす.

**例題 4 - 4**  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  について次のハッセ図が表している  $A$  上の順序を表しなさい.



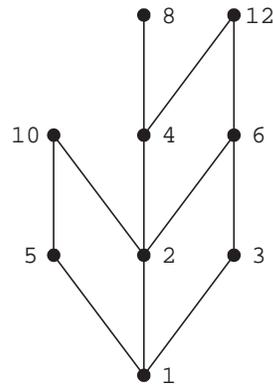
(例題 4 - 4 の解答)

$$a \preceq a, b \preceq a, b \preceq b, b \preceq c, b \preceq d, c \preceq c, c \preceq d,$$

$$d \preceq d, e \preceq e, e \preceq d, f \preceq f, f \preceq c, f \preceq d, f \preceq e$$

**類題 4 - 4**  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$ ,  $b \succeq a$  を “ $b$  は  $a$  の倍数” としたときのハッセ図をかきなさい.

( 類題 4 - 4 の解答 )



**例題 4 - 5**  $A = \{a, b, c\}$  としたとき  $A$  の分割  $\Omega$  のうち空集合を要素にもたないものを全て求めよ.

( 例題 4 - 5 の解答 )

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \{\{a\}, \{b, c\}\}, \{\{b\}, \{a, c\}\}, \{\{c\}, \{a, b\}\},$   
 $\{\{a, b, c\}\}$

**類題 4 - 5**  $A = \{a, b, c, d\}$  としたとき  $A$  の分割  $\Omega$  のうち空集合を要素にもたないものを全て求めよ.

( 類題 4 - 5 の解答 )

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}, \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\},$   
 $\{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\}, \{\{b\}, \{c\}, \{a, d\}\}, \{\{b\}, \{d\}, \{a, c\}\},$   
 $\{\{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b, c, d\}\}, \{\{b\}, \{a, c, d\}\},$   
 $\{\{c\}, \{a, b, d\}\}, \{\{d\}, \{a, b, c\}\}, \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$   
 $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}, \{\{a, d\}, \{b, c\}\}, \{\{a, b, c, d\}\}$

**例題 4 - 6**  $A = \{x \mid x \text{ は尾上の講義を履修している} \}$  としたとき  $A$  上の同値関係の例を一つあげなさい.

( 例題 4 - 6 の解答 )

$b = f(a)$  を “ $a$  は  $b$  と同じ月生まれ,” とすれば  $f$  は同値関係.

**類題 4 - 6** 例題 4 - 6 の  $A$  上の同値関係で解答とは異なる例をあげなさい.

( 類題 4 - 6 の解答 )

$b = f(a)$  を “ $a$  は  $b$  と同じ都道府県生まれ,” とすれば  $f$  は同値関係.

**例題 4 - 7** 例題 4 - 6 について尾上は 12 月生まれだとする. [尾上] は何を意味しているか答えなさい.

( 例題 4 - 7 の解答 )

[尾上] = { 履修者のうち 12 月生まれの者 }

**類題 4 - 7** 類題 4 - 7 において, 同値類のうち一つを挙げ何を意味しているか答えなさい.

( 類題 4 - 7 の解答 )

[尾上] = { 広島県生まれの者 }

**例題 4 - 8**  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b\}$ ,  $C = \{x, y, z\}$ ,  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $G_f = \{(1, a), (1, b), (2, a)\}$ ,  $G_g = \{(a, y), (b, x)\}$  のとき  $G_{g \circ f}$  を求めよ.

( 例題 4 - 8 の解答 )

$\{(1, y), (1, x), (2, y)\}$

**類題 4 - 8**  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$ ,  $C = \{x, y, z\}$  とし,  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,

$$G_f = \{(1, b), (1, c), (2, a), (3, c)\}$$

$$G_g = \{(a, x), (a, y), (b, y), (b, z), (c, x)\}$$

とするとき,  $G_{g \circ f}$  を求めなさい.

( 類題 4 - 8 の解答 )

$$G_{g \circ f} = \{(1, y), (1, x), (2, x), (2, y), (3, x)\}$$

**例題 4 - 9**  $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{0, 1, 4, 9\}$ , 関係  $f : A \rightarrow B$ ,  $b = f(a)$  を “ $a^2 = b$ ” とする. このとき  $G_f$  と  $G_{f^{-1}}$  を表しなさい.

( 例題 4 - 9 の解答 )

$$\begin{aligned} G_f &= \{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \\ G_{f^{-1}} &= \{(9, -3), (9, 3), (4, -2), (4, 2), (1, -1), (1, 1), \\ &\quad (0, 0)\} \end{aligned}$$

**類題 4 - 9**  $A = \{1, 2, 5, 6, 10, 12\}$  上の関係  $f$  を  $y = f(x) := x|y$  とする. このとき  $G_f$  と  $G_{f^{-1}}$  を表しなさい.

( 類題 4 - 9 の解答 )

$$\begin{aligned} G_f &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (1, 10), (2, 2), (2, 6), \\ &\quad (2, 10), (5, 5), (5, 10), (6, 6), (6, 12), (10, 10), \\ &\quad (12, 12)\} \\ G_{f^{-1}} &= \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (5, 1), (5, 5), (6, 1), (6, 2), \\ &\quad (6, 6), (10, 1), (10, 2), (10, 5), (10, 10), (12, 1), \\ &\quad (12, 2), (12, 6), (12, 12)\} \end{aligned}$$