

第4章「関係」の問題

例題4 - 1 $A = \{\text{山, 川, 海}\}$, $B = \{\text{動, 静}\}$ のとき直積集合 $A \times B$ と $B \times A$ をかきなさい.

(例題4 - 1の解答)

$$A \times B = \{(\text{山, 動}), (\text{山, 静}), (\text{川, 動}), (\text{川, 静}), (\text{海, 動}), (\text{海, 静})\}$$

$$B \times A = \{(\text{動, 山}), (\text{動, 川}), (\text{動, 海}), (\text{静, 山}), (\text{静, 川}), (\text{静, 海})\}$$

類題4 - 1 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ のとき, 直積集合 $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$ をかきなさい.

(類題4 - 1の解答)

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

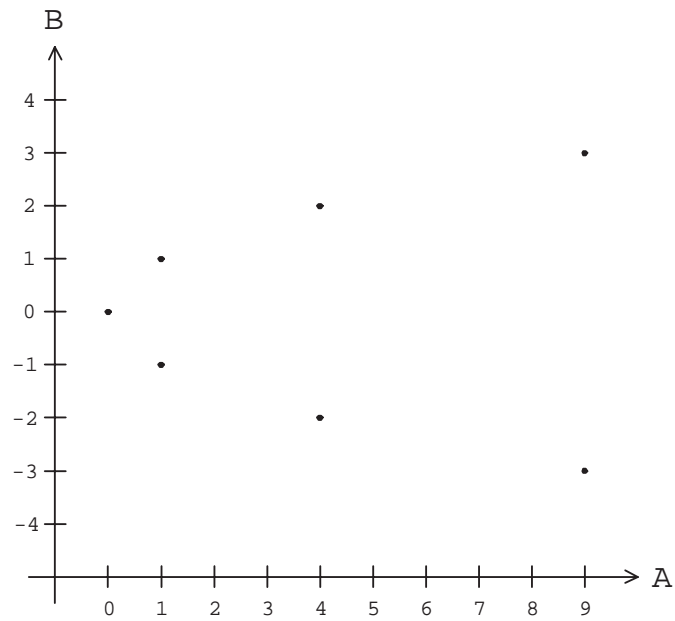
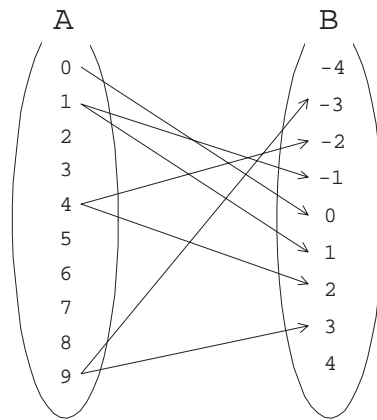
$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

例題4 - 2 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ のとき関係 $f: A \rightarrow B$, $b = f(a)$ を “ $b^2 = a$ ” と定めたとき G_f を集合, 矢線図, 座標図で表しなさい.

(例題4 - 2の解答)

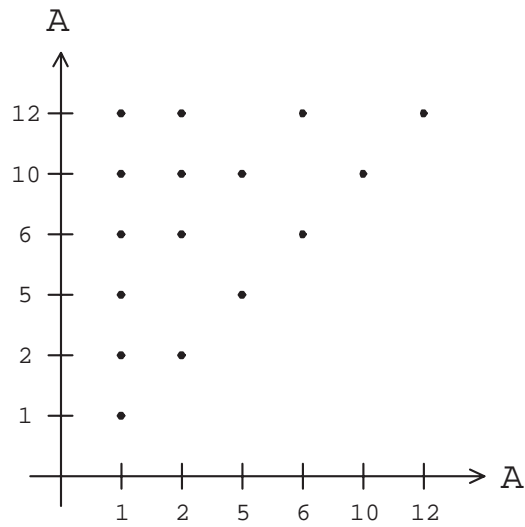
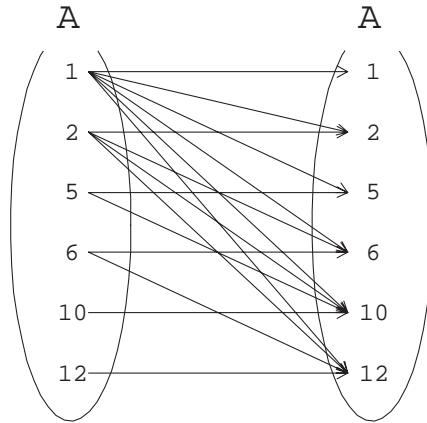
$$G_f = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2), (9, -3), (9, 3)\}$$



類題 4 - 2 $A = \{1, 2, 5, 6, 10, 12\}$ 上の関係 f を $y = f(x) := x|y$ とする. G_f を集合, 矢線図, 座標図で表しなさい.

(類題 4 - 2 の解答)

$$G_f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (1, 10), (2, 2), (2, 6), (2, 10), (5, 5), (5, 10), (6, 6), (6, 12), (10, 10), (12, 12)\}$$



例題 4 - 3 \mathbb{N} 上の関係 $b = f(a)$ を “ $a + b = 5$ ” とするとき, f は反射律, 対称律, 反対称律, 推移律のどれをみたすか.

(例題 4 - 3 の解答)

$$G_f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

$f(1) \neq 1$ より反射律はみたさない.

$f(1) = 4, f(4) = 1$ と $f(2) = 3, f(3) = 2$ より対称律をみたす.

$f(1) = 4, f(4) = 1 \Rightarrow 1 \neq 4$ より反対称律はみたさない.

$f(1) = 4, f(4) = 1 \Rightarrow f(1) \neq 1$ より推移律はみたさない.

類題 4 - 3 \mathbb{N} 上の関係 $b = f(a)$ を “ $a + 4b = 10$ ” とするとき, f は反射律, 対称律, 反対称律, 推移律のどれをみたすか.

(類題 4 - 3 の解答)

$$G_f = \{(2, 2), (6, 1)\}$$

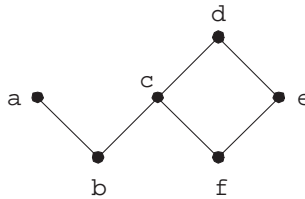
$f(2) = 2$ であるが, $f(6) \neq 6$ より反射律はみたさない.

$f(6) = 1$ であるが $f(1)$ が定義されない所以对称律はみたさない.

$f(2) = 2$ より反対称律をみたす.

$f(2) = 2$ より推移律をみたす.

例題 4 - 4 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ について次のハッセ図が表している A 上の順序を表しなさい.



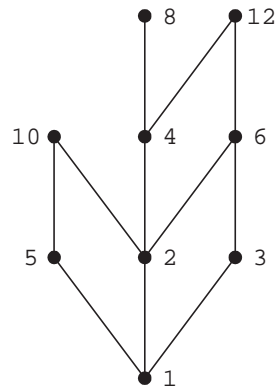
(例題 4 - 4 の解答)

$$a \preceq a, b \preceq a, b \preceq b, b \preceq c, b \preceq d, c \preceq c, c \preceq d,$$

$$d \preceq d, e \preceq e, e \preceq d, f \preceq f, f \preceq c, f \preceq d, f \preceq e$$

類題 4 - 4 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$, $b \succeq a$ を “ b は a の倍数” としたときのハッセ図をかきなさい.

(類題 4 - 4 の解答)



例題 4 - 5 $A = \{a, b, c\}$ としたとき A の分割 Ω のうち空集合を要素にもたないものを全て求めよ.

(例題 4 - 5 の解答)

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \{\{a\}, \{b, c\}\}, \{\{b\}, \{a, c\}\}, \{\{c\}, \{a, b\}\},$
 $\{\{a, b, c\}\}$

類題 4 - 5 $A = \{a, b, c, d\}$ としたとき A の分割 Ω のうち空集合を要素にもたないものを全て求めよ.

(類題 4 - 5 の解答)

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}, \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\},$
 $\{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\}, \{\{b\}, \{c\}, \{a, d\}\}, \{\{b\}, \{d\}, \{a, c\}\},$
 $\{\{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b, c, d\}\}, \{\{b\}, \{a, c, d\}\},$
 $\{\{c\}, \{a, b, d\}\}, \{\{d\}, \{a, b, c\}\}, \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
 $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}, \{\{a, d\}, \{b, c\}\}, \{\{a, b, c, d\}\}$

例題 4 - 6 $A = \{x \mid x \text{ は尾上の講義を履修している} \}$ としたとき A 上の同値関係の例を一つあげなさい.

(例題 4 - 6 の解答)

$b = f(a)$ を “ a は b と同じ月生まれ,” とすれば f は同値関係.

類題 4 - 6 例題 4 - 6 の A 上の同値関係で解答とは異なる例をあげなさい.

(類題 4 - 6 の解答)

$b = f(a)$ を “ a は b と同じ都道府県生まれ,” とすれば f は同値関係.

例題 4 - 7 例題 4 - 6 について尾上は 12 月生まれだとする. [尾上] は何を意味しているか答えなさい.

(例題 4 - 7 の解答)

[尾上] = { 履修者のうち 12 月生まれの者 }

類題 4 - 7 類題 4 - 7 において, 同値類のうち一つを挙げ何を意味しているか答えなさい.

(類題 4 - 7 の解答)

[尾上] = { 広島県生まれの者 }

例題 4 - 8 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{x, y, z\}$, $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $G_f = \{(1, a), (1, b), (2, a)\}$, $G_g = \{(a, y), (b, x)\}$ のとき $G_{g \circ f}$ を求めよ.

(例題 4 - 8 の解答)

$\{(1, y), (1, x), (2, y)\}$

類題 4 - 8 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{x, y, z\}$ とし, $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$,

$$G_f = \{(1, b), (1, c), (2, a), (3, c)\}$$

$$G_g = \{(a, x), (a, y), (b, y), (b, z), (c, x)\}$$

とするとき, $G_{g \circ f}$ を求めなさい.

(類題 4 - 8 の解答)

$$G_{g \circ f} = \{(1, y), (1, x), (2, x), (2, y), (3, x)\}$$

例題 4 - 9 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 4, 9\}$, 関係 $f : A \rightarrow B$, $b = f(a)$ を “ $a^2 = b$ ” とする. このとき G_f と $G_{f^{-1}}$ を表しなさい.

(例題 4 - 9 の解答)

$$G_f = \{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$$

$$G_{f^{-1}} = \{(9, -3), (9, 3), (4, -2), (4, 2), (1, -1), (1, 1), (0, 0)\}$$

類題 4 - 9 $A = \{1, 2, 5, 6, 10, 12\}$ 上の関係 f を $y = f(x) := x|y$ とする. このとき G_f と $G_{f^{-1}}$ を表しなさい.

(類題 4 - 9 の解答)

$$G_f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (1, 10), (2, 2), (2, 6), (2, 10), (5, 5), (5, 10), (6, 6), (6, 12), (10, 10), (12, 12)\}$$

$$G_{f^{-1}} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (5, 1), (5, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 6), (10, 1), (10, 2), (10, 5), (10, 10), (12, 1), (12, 2), (12, 6), (12, 12)\}$$