第５章「命題論理」の問題

例題５－１　次の主張は命題か, また命題ならばその真偽を判定しなさい.

(1) 4 は 3 より小さい数である.
(2) イワシは魚である.
(3) 私は美人である.

（例題５－１の解答）

(1) 偽な命題
(2) 真な命題
(3) 命題ではない

類題５－１　次の主張は命題か, また命題ならばその真偽を判定しなさい.

(1) 水は酸素原子と水素原子からできている.
(2) 4 月には 31 日がある.
(3) 阪神タイガースは強い.

（類題５－１の解答）

(1) 真な命題
(2) 偽な命題
(3) 命題ではない

例題５－２　$\sim p \vee q$ の真理表をつくりなさい.

（例題５－２の解答）

p	q	$\sim p$	$\vee$	q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	F

注)　これにより $p \Rightarrow q$ と $\sim p \vee q$ は同値であることがわかる.

類題５－２　$(p \wedge q) \Rightarrow \sim q$ の真理表をつくりなさい.

（類題５－２の解答）

p	q	$(p \wedge q)$	$\Rightarrow$	$\sim q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	F	T	F
F	F	F	T	T

例題５－３　“私が千円もっているならば私はラーメンを食べる” の逆, 裏, 対偶を述べなさい.

（例題５－３の解答）

逆:私がラーメンを食べるならば私は千円もっている.
裏:私が千円もっていないならば私はラーメンを食べない.
対偶:私がラーメンを食べないならば私は千円もっていない.

類題５－３　“$\triangle ABC$ が正三角形であるならば $\triangle ABC$ は二等辺三角形である” の逆, 裏, 対偶を述べなさい.

（類題５－３の解答）

逆:$\triangle ABC$ が二等辺三角形であるならば $\triangle ABC$ は正三角形である.
裏:$\triangle ABC$ が正三角形でないならば $\triangle ABC$ は二等辺三角形でない.
対偶:$\triangle ABC$ が二等辺三角形でないならば $\triangle ABC$ は正三角形ではない.

例題５－４　$U = \mathbf{R}$ として次の命題関数の真理集合を求めよ.

$$p(x) : \text{“}x \in \mathbf{N} \wedge (x+2)(x-4) < 0\text{”}$$

（例題５－４の解答）　$T_p = \{1,\ 2,\ 3\}$

類題５－４　次の命題関数の真理集合を求めなさい. ただし $U = \mathbf{R}$ とする.

(1) $P(x)$: “$x(x-2) > 0 \vee (x-1)(x-3) > 0$”
(2) $Q(x)$: “$x(x-2) < 0 \wedge (x-1)(x-3) < 0$”
(3) $R(x)$: “$x(x-2) > 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) < 0$”

（類題５－４の解答)

(1) $T_P = \{x|x < 1 \vee x > 2\}$
(2) $T_Q = \{x|1 < x < 2\}$
(3) $T_R = \{x|0 < x < 3\}$

例題５－５ ド・モルガンの法則

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge q$$

を示しなさい.

（例題５－５の解答）

p	q	$\sim$	$(p \vee q)$
T	T	F	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

p	q	$\sim p$	$\wedge$	$\sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

一致しているので同値

類題５－５ 次の同値性を真理表によって示しなさい.

(1) $(p \wedge q) \vee \sim p \equiv \sim p \vee q$
(2) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

（類題５－５の解答）

(1)

p	q	$p \wedge q$	$\vee$	$\sim p$
T	T	T	T	F
T	F	F	F	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

p	q	$\sim p$	$\vee$	q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	F

(2)

p	q	p	$\wedge$	$(\sim p$	$\vee$	$q)$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	F	F
F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	F

p	p	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例題５－６　$\sim(p \Rightarrow q) \vee p \equiv p$ を代数計算で示しなさい.

（例題５－６の解答）

$$
\begin{aligned}
\sim(p \Rightarrow q) \vee p &\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee p \\
&\equiv (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee p \\
&\equiv (p \wedge \sim q) \vee p \\
&\equiv p
\end{aligned}
$$

類題５－６　次の同値性を代数計算で示しなさい.

(1) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$
(2) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q$

（類題５－６の解答）

(1)

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \Rightarrow r &\equiv \sim(p \wedge q) \vee r \\
&\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \\
&\equiv (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee r) \\
&\equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
p \Rightarrow (q \Rightarrow r) &\equiv p \Rightarrow (\sim q \vee r) \\
&\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \\
&\equiv \sim p \vee (r \vee \sim q) \\
&\equiv (\sim p \vee r) \vee \sim q \\
&\equiv \sim(p \wedge \sim r) \vee \sim q \\
&\equiv (p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q
\end{aligned}
$$

例題５－７　“北アルプスの全ての山は 3000m 以上である” の否定命題を作りなさい.

（例題５－７の解答）

北アルプスのある (少なくとも 1 つの) 山は 3000m 未満である

類題５－７ "日本のある川の長さは 400km 以上である" の否定命題を作りなさい.

（類題５－７の解答）
日本の全ての川の長さは 400km 未満である (= 長さが 400km 以上の川は日本にはない)

例題５－８ (　　　) に必要, 十分, 必要十分のいずれかをあてはめなさい.

p : 二人は異性である
q : 二人は結婚している

としたとき, p は q の (　　　) 条件であり, q は p の (　　　) 条件である.

（例題５－８の解答）
順に, 必要, 十分

類題５－８ $U = \mathbf{R}$ とし, $p(x) :=$ "$x^2 < 1$" とする. 次の $q(x)$ は $p(x)$ であるための何条件か.

(1) $q(x) :=$ "$x < 2$"
(2) $q(x) :=$ "$x < 0$"
(3) $q(x) :=$ "$x < 0 \wedge x \geq -\frac{1}{2}$"
(4) $q(x) :=$ "$(-1 < x < 1) \vee (2x^2 - 1 = 0)$"

（類題５－８の解答）

(1) 必要条件
(2) 必要条件でも十分条件でもない
(3) 十分条件
(4) 必要十分条件

例題５－９ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を数学的帰納法で証明しなさい.

（例題５－９の解答）

$n=1$ のとき, 左辺 $=1^2=1$, 右辺 $=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)=1$ で一致するから与式は $n=1$ で正しい.

$n=k$ のとき与式が正しいと仮定する．すなわち $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ が正しいと仮定する．すると

$$\begin{aligned}\underbrace{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}_{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)}+(k+1)^2 &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\ &= \frac{k+1}{6}(k(2k+1)+6(k+1))\\ &= \frac{k+1}{6}(2k^2+k+6k+6)\\ &= \frac{k+1}{6}(2k^2+7k+6)\\ &= \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3)\\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\end{aligned}$$

となるから $n=k+1$ でも与式は正しくなる.

以上より与式は任意の自然数で正しい.

類題５－９ $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ を数学的帰納法で証明しなさい.

（類題５－９の解答）

$n=1$ のとき, 左辺 $=1$, 右辺 $=1^2=1$ で一致するから与式は $n=1$ のとき正しい.

$n=k$ のとき与式が正しいと仮定する．すなわち $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ が正しいと仮定する．すると

$$\begin{aligned}\underbrace{1+3+5+\cdots+(2k-1)}_{k^2}+(2k+1) &= k^2+(2k+1)\\ &= k^2+2k+1\\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

となるから $n=k+1$ でも与式は正しくなる.

以上より与式は任意の自然数で正しい.