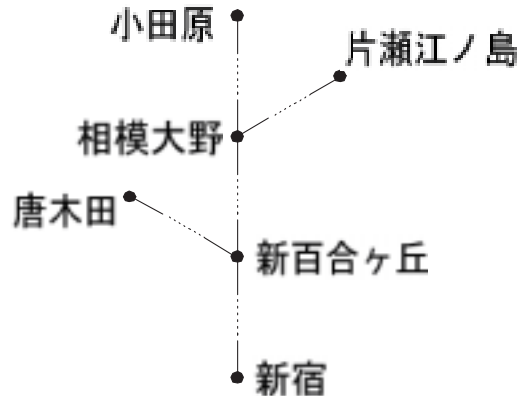


第6章「順序と束」の問題

例題 6 - 1 線形順序集合でない順序集合の例を挙げなさい。

(例題 6 - 1 の解答) {小田急線の駅}, $a \preceq b$ を “小田急線で新宿駅から a 駅を通過して b 駅に着く,” とすると半順序集合となり, ハッセ図は小田急線の路線図になる。



類題 6 - 1 例題 6 - 1 で解答と異なる例を挙げなさい。

(類題 6 - 1 の解答) 例題 6 - 4 等

例題 6 - 2 S をアルファベットの全体とし, $S \times S \times S$ に辞書式順序を定義しなさい。

(例題 6 - 2 の解答)

$$(a, b, c) \preceq (a', b', c') := (a \prec a') \text{ または } \{(a = a') \wedge (b \prec b')\} \\ \text{ または } \{(a = a') \wedge (b = b') \wedge (c \prec c')\}$$

類題 6 - 2 S をアルファベットの全体とし, $S \times S \times S \times S$ に辞書式順序を定義しなさい。

(類題 6 - 2 の解答)

$$(a, b, c, d) \preceq (a', b', c', d') :=$$

$$(a < a') \text{ または } \{(a = a') \wedge (b < b')\}$$

$$\text{または } \{(a = a') \wedge (b = b') \wedge (c < c')\}$$

$$\text{または } \{(a = a') \wedge (b = b') \wedge (c = c') \wedge (d < d')\}$$

例題 6 - 3 次の集合は整除順序で線形順序集合になるか調べなさい.

- (1) {12 の約数}
- (2) {16 の約数}

(例題 6 - 3 の解答)

- (1) $12 = 2^2 \times 3$ となり 2 と 3 は比較可能でないので線形順序集合とならない
- (2) $16 = 2^4$ となり 2^k と 2^l は比較可能なので線形順序集合となる

類題 6 - 3 次の集合は整除順序で線形順序集合になるか調べなさい.

- (1) {24, 2, 6}
- (2) {3, 15, 5}
- (3) {15, 5, 30}
- (4) {2, 8, 32, 4}
- (5) {1, 2, 3, ...}
- (6) {7}

(類題 6 - 3 の解答)

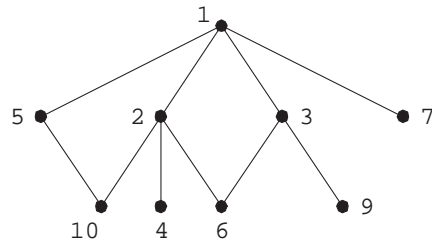
- (1) 線形順序集合
- (2) 3 と 5 は互いに割り切れないので線形順序集合ではない
- (3) 線形順序集合
- (4) 線形順序集合
- (5) 任意の二つの素数は互いに割り切れないので線形順序集合ではない
- (6) 線形順序集合

例題 6 - 4 次の順序集合のハッセ図をかきなさい.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

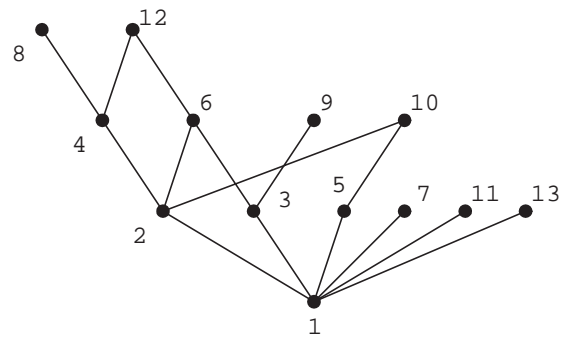
$$a \preceq b := \text{“}b \text{は} a \text{の約数”}$$

(例題 6 - 4 の解答)



類題 6 - 4 $A = \{1, 2, 3, \dots, 11, 12, 13\}$ 上の整除順序によるハッセ図をかきなさい.

(類題 6 - 4 の解答)



例題 6 - 5 例題 6 - 4 の順序集合 A の極大元, 極小元を求めなさい.

(例題 6 - 5 の解答)

極大元 1

極小元 4, 6, 7, 9, 10

注) 普段慣れている数の大小とは関係ないので注意しよう.

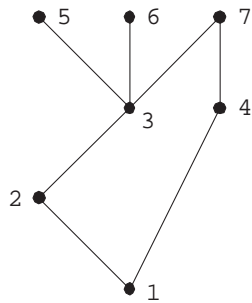
類題 6 - 5 $A = \mathbb{N} - \{1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$ に整除順序をつけるとき、
 極大元, 極小元を求めなさい.

(類題 6 - 5 の解答)

極大元 なし

極小元 なし

例題 6 - 6 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ に次のハッセ図で順序を定義する.



3 個以上の要素からなる線形順序の部分集合をすべて求めなさい.

(例題 6 - 6 の解答)

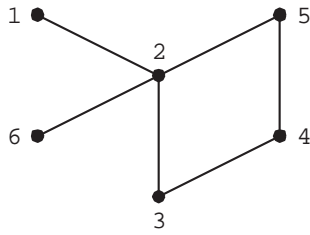
$\{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 7\}, \{1, 4, 7\}$

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}$

$\{1, 2, 6\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 3, 6\}$

$\{1, 2, 7\}, \{1, 3, 7\}, \{2, 3, 7\}$

類題 6 - 6 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に次のハッセ図で順序を定義する.



A の極大元, 極小元を求めなさい. また, 3個以上の要素からなる線形順序の部分集合をすべて求めなさい.

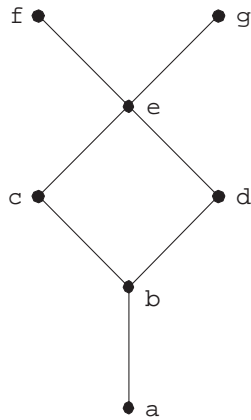
(類題 6 - 6 の解答)

極大元 1, 5

極小元 6, 3

$\{1, 2, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{5, 2, 3\}, \{5, 2, 6\}, \{5, 4, 3\}$

例題 6 - 7 $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ に次のハッセ図で順序を定義する.



部分集合 $B = \{b, c, d\}$ の上界, $\sup B$, 下界, $\inf B$ を求めなさい.

(例題 6 - 7 の解答)

上界 $e, f, g, \sup B e$

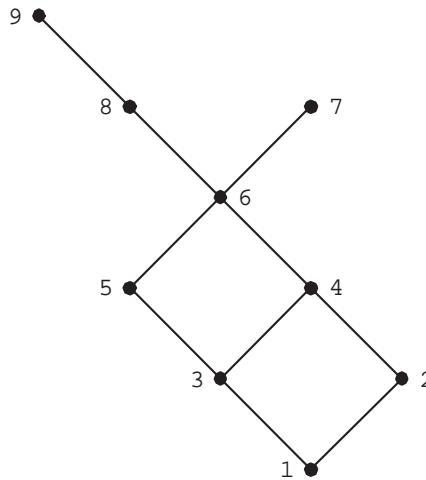
下界 $a, b, \inf B b$

注) $\sup B$ は上界の中で最も B に近いもの.

$\inf B$ は下界の中で最も B に近いもの.

$\sup B$ や $\inf B$ がもとの集合 B に属しているかどうかはどちらでもかまわない。

類題 6 - 7 $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ に次のハッセ図で順序を定義するとき、以下の部分集合に対する上界, $\sup B$, 下界, $\inf B$ をそれぞれ求めなさい。



- (1) $A = \{2, 3, 5\}$
- (2) $B = \{3, 6, 8\}$
- (3) $C = \{2, 5, 7, 8\}$

(類題 6 - 7 の解答)

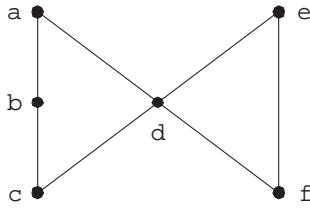
- (1) 上界 $\{6, 7, 8, 9\}$, $\sup A$ 6, 下界 1, $\inf A$ 1
- (2) 上界 $\{8, 9\}$, $\sup B$ 8, 下界 $\{1, 3\}$, $\inf B$ 3
- (3) 上界なし, $\sup C$ なし, 下界 1, $\inf C$ 1

例題 6 - 8 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ は順序集合であり

$$c \ll b, c \ll d, f \ll d, f \ll e, b \ll a, d \ll a, d \ll e$$

が成り立っているときハッセ図をかきなさい。

(例題 6 - 8 の解答)



類題 6 - 8 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ は順序集合であり

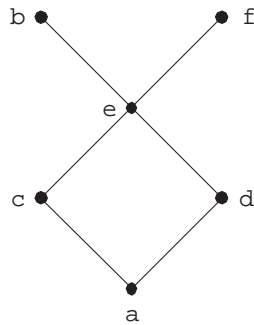
$$e \ll f, a \ll d, c \ll e, d \ll e, a \ll c, e \ll b$$

が成り立っている. このとき次の各問いに答えなさい.

- (1) ハッセ図をかきなさい.
- (2) A の極大元, 極小元を求めなさい.
- (3) 比較可能な要素の対をすべて求めなさい.
- (4) 束か調べなさい.

(類題 6 - 8 の解答)

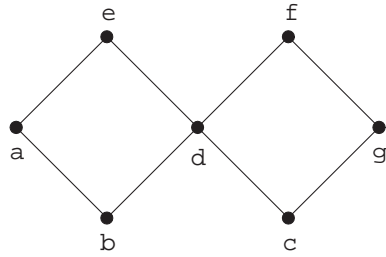
(1)



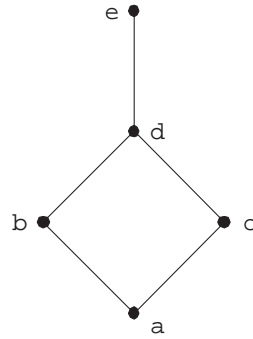
- (2) 極大元 b, f , 極小元 a
- (3) a と c, a と d, a と e, a と f, a と b, c と e, c と f, c と b, d と e, d と f, d と b, e と b, e と f
- (4) $\sup\{b, f\}$ が存在しないから束ではない

例題 6 - 9 次の順序集合のハッセ図のうち束になっているものはどれか。

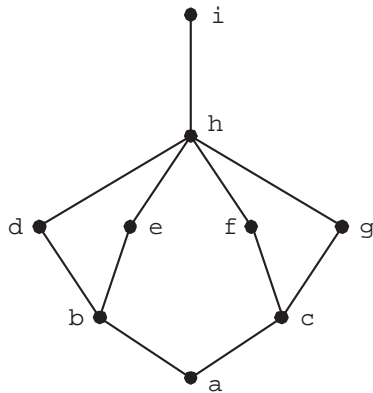
(1)



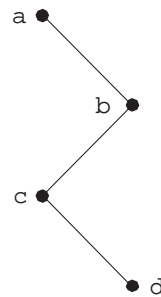
(2)



(3)



(4)

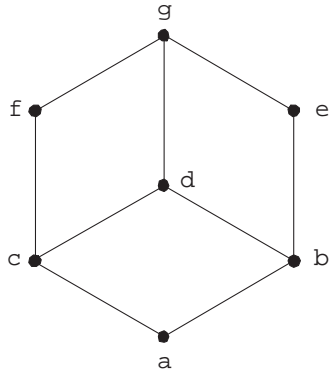


(例題 6 - 9 の解答)

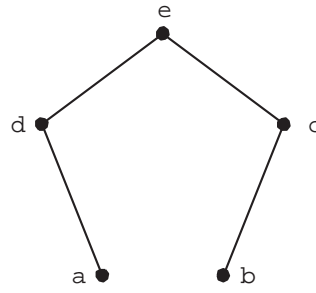
(2), (3), (4)

類題6 - 9 次のハッセ図のうち束になっているものはどれか.

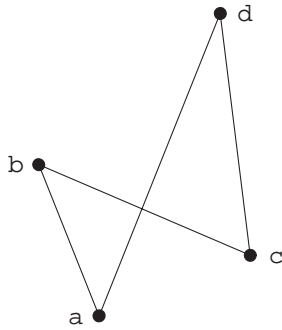
(1)



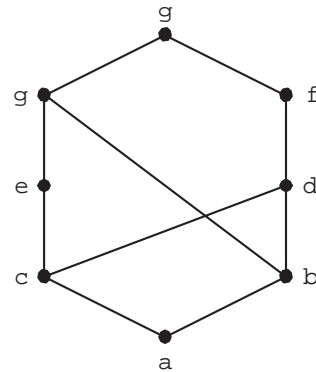
(2)



(3)



(4)



(類題6 - 9の解答)

(1), (4)